Лекция 1

Линейные операторы. Общие понятия. Ограниченные и непрерывные операторы.

1.1 Общие понятия

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — некоторые линейные пространства и в $\mathcal{X}$ выделено множество G. Отображение $\mathfrak{F}$, ставящее в соответствие элементам $x \in G$ элементы $y \in \mathcal{Y}$, называется отображением из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, а множество G — *областью его определения* и обозначается $\mathfrak{D}(\mathfrak{F})$.

Множество $P = \{y \mid y \in \mathcal{Y},\ \exists x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{F}) : \mathfrak{F}(x) = y\}$ называется *областью значений* или *образом* отображения $\mathfrak{F}$ и обозначается $\mathfrak{R}(\mathfrak{F})$.

Отображение называется *однозначным*, если каждому элементу $x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{F})$ ставится в соответствие один и только один элемент $y \in \mathfrak{R}(\mathfrak{F})$. Отображение называется *взаимно однозначным*, если каждому элементу $y \in \mathfrak{R}(\mathfrak{F})$ соответствует один и только один элемент $x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{F})$, отображаемый в y, то есть

$$\forall y \in \mathfrak{R}(\mathfrak{F}) \quad \exists! x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{F}) \ : \quad \mathfrak{F}(x) = y\,.$$

Элемент x называется *прообразом* элемента y, а элемент y — *образом* элемента x.

Отображения $\mathfrak{F}_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и $\mathfrak{F}_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называются *равными*, если совпадают их области определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{D}(\mathfrak{F}_2)$ и справедливо соотношение

$$\forall x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{F}_1)\ \big[= \mathfrak{D}(\mathfrak{F}_2)\big] \ : \quad \mathfrak{F}_1(x) = \mathfrak{F}_2(x)\,.$$

Если отображения $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ таковы, что $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}_1) \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{F}_2)$, причем

$$\forall x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{F}_1) \ : \quad \mathfrak{F}_1(x) = \mathfrak{F}_2(x)\,,$$

то отображение $\mathfrak{F}_2$ называется *продолжением* или *расширением* отображения $\mathfrak{F}_1$, а $\mathfrak{F}_1$, соответственно, — *сужением* отображения $\mathfrak{F}_2$.

Определение 1.1.1. *Отображение $\mathfrak{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется* линейным оператором*, действующим из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, если $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}) \subset \mathcal{X}$ является линейным многообразием и справедливо соотношение*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{F}) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \ : \quad \mathfrak{F}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \mathfrak{F}(x_1) + \lambda_2 \mathfrak{F}(x_2)\,, \tag{1.1}$$

где λ_1 и λ_2 — скаляры из поля, над которым построено пространство $\mathcal{X}$. Это соотношение называется свойством линейности.

Если $\mathfrak{A}$ — линейный оператор, то $\mathfrak{A}0 = 0$. Действительно, в силу свойства линейности $\mathfrak{A}0 = \mathfrak{A}(x - x) = \mathfrak{A}x - \mathfrak{A}x = 0$, где x — произвольный элемент из $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$.

Ядром оператора $\mathfrak{A}$ называется такое множество $K \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, все элементы которого обращаются этим оператором в ноль:

$$K = \{x \mid x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}),\ \mathfrak{A}x = 0\}\,.$$

Ядро обозначается $K = \mathfrak{Ker}(\mathfrak{A})$.

Теорема 1.1.1. *Как ядро, так и образ линейного оператора являются линейными многообразиями.*

Доказательство. (Для самостоятельного изучения) □

Важными случаями являются тождественный оператор $\mathfrak{I}x = x$, для которого $\mathfrak{D}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{I})$, $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{I}) = \{0\}$, а также нулевой оператор $\mathfrak{O}x = 0$, для которого $\mathfrak{R}(\mathfrak{O}) = \mathfrak{Ker}(\mathfrak{O})$.

1.2 Ограниченные и непрерывные операторы

В дальнейшем будет предполагаться, что пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, в которых действуют рассматриваемые операторы, являются нормированными (и в некоторых случаях банаховыми).

Определение 1.2.1. *Линейный оператор $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется* ограниченным, *если ограничен образ множества $\bar{S}_1(0) \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, то есть*

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A})\ (\|x\|_{\mathcal{X}} \leqslant 1)\ :\quad \|\mathfrak{A}x\|_{\mathcal{Y}} \leqslant C\,.$$

Можно показать, что оператор, ограниченный в смысле этого определения, будет ограничен и на любом другом шаре. Действительно, пусть дан произвольный шар $\bar{S}_\alpha(x_0) \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. Выберем любой элемент $x \in \bar{S}_\alpha(x_0)$ и представим его в виде $x = \beta x'$, где $\beta = \|x\|$, $x' = x/\|x\|$. Так как множество $\bar{S}_\alpha(x_0)$ само по себе ограничено, то

$$\exists C_\alpha \quad \forall x \in \bar{S}_\alpha(x_0)\ :\quad \beta(x) = \|x\| \leqslant C_\alpha\,.$$

Заметив, что $\|x'\| = 1$, получаем $\|\mathfrak{A}x\| = \beta\|\mathfrak{A}x'\| \leqslant C_\alpha C$.

Обратно, если оператор ограничен на любом шаре, то он ограничен и на $\bar{S}_1(0)$. Поэтому можно сформулировать альтернативное определение:

Определение 1.2.2. *Линейный оператор $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется* ограниченным, *если он переводит любое ограниченное множество в ограниченное.*

Замечание. *Можно показать, что любой линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве, автоматически является ограниченным.*

Теорема 1.2.1. *Линейный оператор $\mathfrak{A}$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A})\ :\quad \|\mathfrak{A}x\| \leqslant C\|x\|\,.$$

Доказательство. При $x = 0$ утверждение теоремы очевидно. При $x \neq 0$ оно следует из соотношения $\|\mathfrak{A}x\| = \left\| \|x\| \cdot \mathfrak{A}(\frac{x}{\|x\|}) \right\| = \|x\| \cdot \|\mathfrak{A}(\frac{x}{\|x\|})\| \leqslant C\|x\|$, так как $\frac{x}{\|x\|} \in \bar{S}_1(0)$. $\square$

Следствие. *Для того чтобы линейный оператор был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию Липшица.*

Определение 1.2.3 (Коши). *Элемент $y_0 \in \mathcal{Y}$ называется* пределом оператора $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *в точке $x_0 \in \mathcal{X}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in \bar{S}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \ : \quad \mathfrak{A}x \in \bar{S}_\varepsilon(y_0)\,.$$

Предел обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} \mathfrak{A}x = y_0$.

Определение 1.2.4. *Оператор $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, определенный в точке $x_0 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, называется* непрерывным в ней*, если* $\lim\limits_{x \to x_0} \mathfrak{A}x = \mathfrak{A}x_0$.

Условие непрерывности оператора $\mathfrak{A}$ в точке x_0 можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \ (\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)) \ : \quad \|\mathfrak{A}x - \mathfrak{A}x_0\|_{\mathcal{Y}} < \varepsilon \tag{1.2}$$

Определение 1.2.5. *Линейный оператор $\mathfrak{A}$ называется* непрерывным на множестве *$M \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, если он непрерывен в каждой его точке, то есть*

$$\forall x \in M \ : \quad \lim_{z \to x} \mathfrak{A}z = \mathfrak{A}x\,.$$

Лемма 1.2.1. *Для того, чтобы линейный оператор $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ был непрерывен на всей области своего определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в нуле.*

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна. Действительно, если $\mathfrak{A}$ не является непрерывным в нуле, то он уже не непрерывен всюду на $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$.

Для доказательства достаточности предположим, что $\mathfrak{A}$ непрерывен в нуле. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \ (\|x\| < \delta) \ : \quad \|\mathfrak{A}x\| < \varepsilon\,, \text{ так как } \mathfrak{A}0 = 0\,.$$

Выберем произвольно $x_0 \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ и воспользуемся равенством $\|\mathfrak{A}x - \mathfrak{A}x_0\| = \|\mathfrak{A}(x - x_0)\|$. Тогда, если $\|x - x_0\| < \delta$, то $\|\mathfrak{A}x - \mathfrak{A}x_0\| < \varepsilon$ из-за непрерывности $\mathfrak{A}$ в нуле, что и требовалось доказать (см. формулу (1.2)). $\square$

Теорема 1.2.2. *Для того, чтобы оператор $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, действующий в банаховых пространствах, был непрерывен на всей области своего определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Доказательство. Для доказательства необходимости предположим от противного, что непрерывный всюду на $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ оператор $\mathfrak{A}$ неограничен. Это означает неограниченность множества$\bar{S}_1(0)$. Если это так, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in \bar{S}_1(0) \ : \quad \|\mathfrak{A}x_n\| \geqslant n\,,$$

при этом $\|x_n\| \leqslant 1$.

Построим другую последовательность $\hat{x}_n = x_n/n$. Для ее элементов справедливо $\|\hat{x}_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\| \leqslant \frac{1}{n}$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = 0$. Поскольку оператор $\mathfrak{A}$ непрерывен всюду на $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, в том числе и в нуле, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}\hat{x}_n = \mathfrak{A}0 = 0$.

Однако с другой стороны, $\|\mathfrak{A}\hat{x}_n\| = \frac{1}{n}\|\mathfrak{A}x_n\| \geqslant n/n = 1$, то есть стремление $\mathfrak{A}x_n$ к нулю невозможно. Полученное противоречие обосновывает необходимость утверждения теоремы.

Для доказательства достаточности предположим, что оператор $\mathfrak{A}$ ограничен на области своего определения. Отсюда по теореме 1.2.1 следует, что для него справедлива оценка $\|\mathfrak{A}x\| \leqslant C\|x\|$. Тогда, выбрав произвольную последовательность x_n, такую что $x_n \to 0$, получим $0 \leqslant \|\mathfrak{A}x_n\| \leqslant C\|x_n\| \to 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}x_n = 0$ и значит, оператор $\mathfrak{A}$ непрерывен в нуле. Согласно лемме 1.2.1, он является непрерывным и на всей области своего определения. □

Для операторов, *действующих в банаховых пространствах*, может быть сформулировано еще одно определение предела:

Определение 1.2.6 (Гейне). *Элемент $y_0 \in \mathcal{Y}$ называется* пределом оператора $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *в точке $x_0 \in \mathcal{X}$, если для любой последовательности x_n, сходящейся к x_0, последовательность $\mathfrak{A}x_n$ сходится к y_0.*

Как правило, это определение оказывается более удобным для доказательства *несуществования* предела оператора в точке.

Замечание. *Любой линейный оператор, действующий в конечномерных пространствах, автоматически является непрерывным.*

Упражнения

Упражнение 1.1. *Доказать, что оператор $\mathfrak{G} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, где $\mathcal{X} \subset \mathbf{C}[0;1]$ — линейное многообразие непрерывных на $[0;1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = x(1) = 0$, является линейным, непрерывным и ограниченным. Найти $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{G})$. Справедливо ли равенство $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}) = \mathcal{X}$?*

Оператор $\mathfrak{G}$ задан формулой:

$$\mathfrak{G}x(t) = \begin{cases} x(2t), & \text{если } t \in [0;\frac{1}{2}]\,; \\ 0, & \text{если } t \in (\frac{1}{2};1]\,. \end{cases}$$

Упражнение 1.2. *Оператор $\mathfrak{A} : \mathbf{C}[0;1] \to \mathbf{C}[0;1]$ задан формулой:*

$$\mathfrak{A}x(t) = \int_0^1 (2t - z)^2\, x(z) dz\,.$$

Доказать непрерывность этого оператора.

Упражнение 1.3. *Доказать следствие из теоремы* 1.2.1.

Упражнение 1.4. *Оператор $\mathfrak{V} : \mathbf{c}_0 \to \mathbf{c}_0$ задан формулой*

$$\mathfrak{V}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots) = (x_1, 2x_2, x_3, 2x_4, x_5, \ldots)\,.$$

Можно ли записать, что а) $\mathfrak{V} : \mathbf{c} \to \mathbf{c}$; б) $\mathfrak{V} : \mathbf{c} \to \mathbf{m}$?

Лекция 2

Пространство линейных операторов $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Норма и сходимость линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха–Штейнгауза. Продолжение линейного оператора по непрерывности.

2.1 Пространства линейных операторов

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — нормированные линейные пространства. Будем рассматривать всевозможные линейные непрерывные операторы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$,..., действующие из пространства $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$. Все множество таких операторов будем обозначать $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Определим операции сложения операторов и умножения оператора на скаляр следующим образом:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})x = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x\,;$$
$$(\lambda\mathfrak{A})x = \lambda \cdot (\mathfrak{A}x)\,.$$

Относительно этих операций множество $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ образует линейное многообразие. Определим в нем понятие нормы:

$$\|\mathfrak{A}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\mathfrak{A}x\|_{\mathcal{Y}}\,. \tag{2.1}$$

Согласно теореме 1.2.1, для введенной таким образом нормы справедливо соотношение $\|\mathfrak{A}x\| \leqslant \|\mathfrak{A}\| \cdot \|x\|$. Можно показать, что все аксиомы нормы выполняются, а следовательно, $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ образует *нормированное пространство линейных операторов.*

Для тождественного оператора имеем $\|\mathfrak{I}\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|\mathfrak{I}x\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|x\| = 1$[1]. Для нулевого оператора по определению $\|\mathfrak{O}\| = 0$, более того, по аксиомам нормы, если $\|\mathfrak{A}\| = 0$, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$.

Замечание. *Любой оператор $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ непрерывен, а множество $\bar{S}_1(0)$ замкнуто и ограничено. Поэтому, если пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ являются банаховыми, можно записать $\|\mathfrak{A}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \max\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|\mathfrak{A}x\|_{\mathcal{Y}}$.*

Теорема 2.1.1. *Линейный оператор $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ достигает значения своей нормы* на границе *шара $\bar{S}_1(0)$, то есть $\|\mathfrak{A}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\mathfrak{A}x\|$.*

[1] Вообще, для любого оператора $\mathfrak{A}$, такого что $\|\mathfrak{A}x\| = \|x\|$, справедливо $\|\mathfrak{A}\| = 1$, хотя обратное утверждение неверно.

Доказательство. Нулевой оператор достигает значения своей нормы (равного нулю) *в любой* точке, в том числе и на поверхности шара $\bar{S}_1(0)$. Поэтому будем рассматривать нетривиальный случай $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{O}$.

Предположим от противного, что значение нормы (супремум) достигается в некоторой точке x_0, такой что $\|x_0\| < 1$. (То, что значение нормы вообще достигается в некоторой точке, следует из замкнутости и ограниченности $\bar{S}_1(0)$.) Тогда $\beta = 1/\|x_0\| > 1$, и для вектора $\hat{x} = \beta x_0$ имеем $\|\hat{x}\| = 1$, то есть $\hat{x} \in \bar{S}_1(0)$. При этом $\|\mathfrak{A}\hat{x}\| = \beta\|\mathfrak{A}x_0\| > \|\mathfrak{A}x_0\|$, что противоречит предположению. Тем самым теорема доказана. □

Следствие. *Норму оператора можно ввести формулой* $\|\mathfrak{A}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{\|\mathfrak{A}x\|}{\|x\|}$.

Замечание. *Норма оператора совпадает с точной нижней гранью множества всевозможных значений константы C, присутствующей в условии теоремы* 1.2.1.

2.2 Сходимость в пространствах линейных операторов

Пусть в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ выбрана последовательность операторов $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и фиксированный оператор $\mathfrak{A}$.

Определение 2.2.1. *Последовательность $\mathfrak{A}_n$ сходится к оператору $\mathfrak{A}$* равномерно, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}\| = 0$*, то есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N^{(1)}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N^{(1)}(\varepsilon) \ : \quad \|\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}\| < \varepsilon\,. \tag{2.2}$$

Факт равномерной сходимости обозначается $\mathfrak{A}_n \rightrightarrows \mathfrak{A}$.

Определение 2.2.2. *Последовательность $\mathfrak{A}_n$ сходится к оператору $\mathfrak{A}$* сильно *или* поточечно*, если*

$$\forall x \in \mathcal{X} \ : \quad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}_n x = \mathfrak{A}x\,, \qquad \textit{то есть}$$

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N^{(2)}(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N^{(2)}(\varepsilon, x) \ : \quad \|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| < \varepsilon\,. \tag{2.3}$$

Факт сильной сходимости обозначают $\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}$.

Теорема 2.2.1. *Если последовательность $\mathfrak{A}_n$ сходится равномерно, то она сходится и сильно.*

Доказательство. Пусть имеет место равномерная сходимость $\mathfrak{A}_n \rightrightarrows \mathfrak{A}$. Рассмотрим условие (2.3). Имеем

$$\|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| = \|(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A})x\| \leqslant \|\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}\| \cdot \|x\|\,. \tag{2.4}$$

Поскольку (2.2) выполняется, то достаточно выбрать $N^{(2)}(\varepsilon, x) = N^{(1)}(\dfrac{\varepsilon}{\|x\|})$ и тогда $\|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| < \varepsilon$. □

Замечание. *Теорема утверждает, что из равномерной сходимости следует сильная, однако обратное утверждение неверно: последовательность операторов может сходиться сильно, но при этом не сходиться равномерно.*

Теорема 2.2.2. *Для равномерной сходимости $\mathfrak{A}_n \rightrightarrows \mathfrak{A}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon) \quad \forall x \in \bar{S}_1(0) \ : \quad \|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| < \varepsilon\,. \qquad (2.5)$$

Доказательство. Необходимость вытекает из уже использовавшегося неравенства (2.4). Поскольку $\mathfrak{A}_n \rightrightarrows \mathfrak{A}$ и $x \in \bar{S}_1(0)$ (то есть $\|x\| \leqslant 1$), отсюда следует что $\|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| < \varepsilon$.

Для доказательства достаточности предположим, что (2.5) выполняется и, задавшись произвольным ε, найдем $N(\varepsilon/2)$. Но если на шаре $\bar{S}_1(0)$ выполняется $\|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| = \|(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A})x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то можно записать $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_\mathfrak{n})x\| < \varepsilon$. Тогда, по определению (2.1) нормы оператора, $\|\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}\| < \varepsilon$, а это, согласно условию (2.2), и означает что $\mathfrak{A}_n \rightrightarrows \mathfrak{A}$. □

В пространстве $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ можно обычным образом ввести понятие фундаментальной последовательности $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N} \ : \quad \|\mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_{n+p}\| < \varepsilon\,.$$

На вопрос о полноте $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ответ дает следующая теорема:

Теорема 2.2.3. *Если пространство $\mathcal{X}$ является нормированным, а пространство $\mathcal{Y}$ — банаховым, то пространство $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ само является банаховым, то есть полно в норме* (2.1).

Теорема 2.2.4 (Банаха–Штейнгауза). *Для того, чтобы последовательность $\{\mathfrak{A}_n\} \subset \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ сильно сходилась к оператору $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы:*

1. *была ограничена последовательность норм $\{\|\mathfrak{A}_n\|\}$;*

2. *имела место сильная сходимость $\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}$ на некотором линейном многообразии $\mathcal{X}'$, всюду плотном в $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна. Действительно, если $\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}$, то по определению $\forall x \in \mathcal{X} \ : \ \|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| \to 0$. Отсюда следует, что $\|\mathfrak{A}_n x\| \to \|\mathfrak{A}x\|$, а так как сходящаяся последовательность ограничена, то $\{\mathfrak{A}_n x\}$ ограничена при любом x и, следовательно, в силу предыдущей теоремы ограничена последовательность норм $\{\|\mathfrak{A}_n\|\}$. В качестве же многообразия $\mathcal{X}'$ можно выбрать все пространство $\mathcal{X}$, которое, очевидно, является плотным в самом себе.

Для доказательства достаточности будем полагать, что $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, но $\mathcal{X}' \neq \mathcal{X}$, иначе утверждение теоремы тривиально. При сделанном предположении множество $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}'$ непусто.

Выберем $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}'$, то есть $x \in \mathcal{X}$ и $x \notin \mathcal{X}'$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. По определению всюду плотного множества, найдется такой элемент $\hat{x} \in \mathcal{X}'$, что $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$.

Положим $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ и найдем $C = \sup\limits_{n \geqslant 0} \|\mathfrak{A}_n\|$. Эта величина конечна, так как по первому условию теоремы последовательность $\{\|\mathfrak{A}_n\|\}$ ограничена.

Покажем теперь, что $\mathfrak{A}_n$ сильно сходится к $\mathfrak{A}$, то есть что величина $\|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\|$ может быть сделана сколь угодно малой. Имеем:

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| &= \|\mathfrak{A}_n(x-\hat{x}) + (\mathfrak{A}_n\hat{x} - \mathfrak{A}x) + \mathfrak{A}(\hat{x}-x)\| \\ &\leqslant \|\mathfrak{A}_n\|\cdot\|x-\hat{x}\| + \|\mathfrak{A}_n\hat{x} - \mathfrak{A}\hat{x}\| + \|\mathfrak{A}\|\cdot\|\hat{x}-x\| \\ &\leqslant C\varepsilon + \|\mathfrak{A}_n\hat{x} - \mathfrak{A}\hat{x}\| + C\varepsilon\end{aligned}$$

Так как $\hat{x} \in \mathcal{X}'$, а на $\mathcal{X}'$ сильная сходимость $\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}$ имеет место, то для второго слагаемого в правой части $\|\mathfrak{A}_n\hat{x} - \mathfrak{A}\hat{x}\| < \varepsilon$ и следовательно,

$$\|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| < (2C+1)\varepsilon\,.$$

Если же выбрать $x \in \mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$, то неравенство $\|\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x\| < \varepsilon$ выполняется сразу (по второму условию теоремы). □

Теорема 2.2.5 (продолжение оператора по непрерывности). *Пусть $\mathcal{X}$ — нормированное, а $\mathcal{Y}$ — банахово пространство. Пусть $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — такой ограниченный линейный оператор, область определения которого $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ всюду плотна в $\mathcal{X}$. Тогда существует ограниченный линейный оператор $\hat{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, являющийся продолжением оператора $\mathfrak{A}$ на все пространство $\mathcal{X}$, причем $\|\hat{\mathfrak{A}}\| = \|\mathfrak{A}\|$.*

Упражнения

Упражнение 2.1. *Для последовательности операторов $\mathfrak{A}_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ имеет место сильная сходимость $\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}$. Пусть в пространстве $\mathcal{Y}$ введено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{Y}}$. Доказать, что*

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall y \in \mathcal{Y} \;:\quad \lim_{n\to\infty}(\mathfrak{A}_n x, y) = (\mathfrak{A}x, y)\,.$$

Упражнение 2.2. *В качестве линейного многообразия $\mathcal{X} \subset \mathbf{C}[0;1]$ выступает множество всех непрерывных на $[0;1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Доказать, что последовательность операторов $\mathfrak{A}_\mathfrak{n} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, заданная формулой*

$$\mathfrak{A}_n x(t) = x(\tfrac{t}{n}), \quad t \in [0;1]\,,$$

сходится к нулевому оператору $\mathfrak{O}$ сильно, но не сходится равномерно.

Упражнение 2.3. *Построить пример оператора, имеющего единичную норму ($\|\mathfrak{A}\| = 1$), для которого $\|\mathfrak{A}x\| \neq \|x\|$.*

Упражнение 2.4. *Найти нормы операторов $\mathfrak{G}$ из упражнения 1.1, $\mathfrak{A}$ из упражнения 1.2 и $\mathfrak{B}$ из упражнения 1.4.*

Лекция 3

Операторные ряды и их сходимость. Обратный оператор и обратимость. Непрерывная обратимость. Операторные уравнения первого и второго рода.

3.1 Операторные ряды

Пусть имеется последовательность линейных операторов $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, каждый из которых отображает пространство $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$. Пусть все эти операторы имеют общую область определения:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{D}(\mathfrak{A}_2) = \ldots$$

Составим из элементов этой последовательности формальную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n \tag{3.1}$$

называемую *операторным рядом*.

Как и в случае числовых рядов, определим понятие частичной суммы ряда:

$$\mathfrak{S}_N = \sum_{n=1}^{N} \mathfrak{A}_n\,.$$

Если существует предел $\mathfrak{S} = \lim\limits_{N\to\infty} \mathfrak{S}_N$, то говорят, что ряд (3.1) сходится к оператору $\mathfrak{S}$, причем характер сходимости последовтельности частичных сумм (равномерная, сильная) определяет характер сходимости ряда.

Как и в случае числовых рядов, справедлив следующий критерий сходимости (доказывается по той же схеме):

Теорема 3.1.1. *Для того, чтобы ряд* (3.1) *сходился некоторым образом, необходимо и достаточно, чтобы соответствующим образом сходился к нулевому оператору остаток ряда*

$$\mathfrak{R}_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathfrak{A}_n\,.$$

Определение 3.1.1. *Ряд* (3.1) *называется* абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathfrak{A}_n\|$.

Теорема 3.1.2 (признак Вейерштрасса). *Если операторный ряд* (3.1) *сходится абсолютно, то он сходится равномерно (а следовательно, сходится и сильно).*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из соотношения

$$0 \leqslant \|\mathfrak{R}_N\| = \|\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathfrak{A}_n\| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\mathfrak{A}_n\|$$

и критерия сходимости числовых рядов, являющегося аналогом теоремы 3.1.1. □

Замечание. *Если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ и пространство $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ банахово, то для сходимости ряда* (3.1) *необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм $\mathfrak{S}_n$ была фундаментальной, то есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \ : \quad \|\sum_{n=N+1}^{N+p} \mathfrak{A}_n\| < \varepsilon$$

(критерий Коши).

3.2 Обратный оператор. Операторные уравнения

Пусть $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и $\mathfrak{B} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Введем для этих двух операторов понятие суперпозиции (умножения), определяемое формулами

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{A})x = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}x)\,;$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})x = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}x)\,.$$

Очевидно, что $\mathfrak{B}\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{B} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$.

Если $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, то можно также ввести операцию возведения в степень, определяемую формулой

$$(\mathfrak{A}^n)x = (\underbrace{\mathfrak{A}\mathfrak{A}\ldots\mathfrak{A}}_{n \text{ раз}})x\,.$$

Определение 3.2.1. *Оператор $\mathfrak{B}$ называется* обратным *к $\mathfrak{A}$ (этот факт обозначается $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}$), если суперпозиции $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ являются тождествами в пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, то есть*

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{I}_{\mathcal{X}} \quad \textit{и} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{I}_{\mathcal{Y}}\,.$$

При этом также и $\mathfrak{A}$ является обратным оператором для $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1}$. Оператор $\mathfrak{A}$, у которого существует обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$, называется обратимым.

Лемма 3.2.1. *Если линейный оператор $\mathfrak{A}$ является обратимым, то его обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ также удовлетворяет свойству линейности* (1.1).

Доказательство. (Для самостоятельного изучения) □

Очевидно, что необходимым условием обратимости линейного оператора является его взаимная однозначность. При этом справедливы соотношения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}^{-1}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}^{-1}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$.

Теорема 3.2.1 (теорема единственности). *Линейный оператор $\mathfrak{A}$ является взаимно однозначным тогда и только тогда, когда его ядро состоит из единственного элемента, равного нулю, то есть $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{A}) = \{0\}$.*

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна. Действительно, если существует ненулевой элемент $x_0 \in \mathfrak{Ker}(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A}x_0 = 0 = \mathfrak{A}0$. Это означает, что два различных прообраза ($x_0 \neq 0$) имеют одинаковый образ и, следовательно, оператор не может быть взаимно однозначным.

Для доказательства достаточности предположим, что $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{A}) = \{0\}$, но оператор не является взаимно однозначным. Тогда в $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ существуют два различных элемента $x_1 \neq x_2$, для которых $\mathfrak{A}x_1 = \mathfrak{A}x_2$. Но в этом случае

$$0 = \mathfrak{A}x_1 - \mathfrak{A}x_2 = \mathfrak{A}(x_1 - x_2)\,,$$

то есть в ядро $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{A})$ должен входить ненулевой элемент $(x_1 - x_2)$, что противоречит предположению. □

Тождественный оператор $\mathfrak{I}$ обратим, причем $\mathfrak{I}^{-1} = \mathfrak{I}$. Нулевой оператор $\mathfrak{O}$ обратимым не является.

Теорема 3.2.2. *Обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ существует и ограничен тогда и только тогда, когда исходный оператор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию*

$$\exists m > 0 \quad \forall x \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \ : \quad \|\mathfrak{A}x\| \geqslant m\|x\|\,. \tag{3.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ существует и ограничен на области своего определения $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$. Согласно теореме 1.2.1, это означает, что

$$\exists C > 0 \quad \forall y \in \mathfrak{R}(\mathfrak{A}) \ : \quad \|\mathfrak{A}^{-1}y\| \leqslant C\|y\|\,.$$

Подставив в это соотношение выражение $y = \mathfrak{A}x$ (имеющее смысл, поскольку $y \in \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$), получим $\|x\| = \|\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}x\| \leqslant C\|\mathfrak{A}x\|$, откуда и следует утверждение теоремы при $m = 1/C$.

Достаточность. Пусть условие (3.2) имеет место. Тогда ядро $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{A})$ не может содержать ненулевых элементов. Действительно, если $x_0 \neq 0$ и $\mathfrak{A}x_0 = 0$, то из (3.2) получается $m\|x_0\| \leqslant 0$, откуда в силу $m > 0$ следует $\|x_0\| = 0$. Итак, $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{A}) = \{0\}$ и по теореме единственности $\mathfrak{A}$ взаимно однозначен, а следовательно, и обратим.

Для доказательства ограниченности оператора $\mathfrak{A}^{-1}$ достаточно в (3.2) положить $x = \mathfrak{A}^{-1}y$, тогда $\|y\|\|\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}y\| \geqslant m\|\mathfrak{A}^{-1}y\|$ и следовательно, $\|\mathfrak{A}^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|$. □

Заметим, что обратный оператор может существовать, но при этом не быть ограниченным, даже если ограничен исходный оператор.

Определение 3.2.2. *Обратимый линейный оператор $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется* непрерывно обратимым, *если область его значений $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ совпадает со всем пространством образа $\mathcal{Y}$, а обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ ограничен.*

Замечание. *Если к условию теоремы 3.2.2 добавить требование $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) = \mathcal{Y}$, то она будет устанавливать условия непрерывной обратимости.*

Теорема 3.2.3. *Если оператор $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ является взаимно однозначным, а пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховыми, то обратный оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ ограничен.*

Сформулируем следующую задачу. Пусть имеется оператор $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и в пространстве $\mathcal{Y}$ выбран некоторый фиксированный элемент $y \in \mathcal{Y}$. Требуется найти такой элемент $x \in \mathcal{X}$ (если он существует), который обращал бы в тождество соотношение

$$\mathfrak{A}x = y\,, \tag{3.3}$$

называемое *операторным уравнением первого рода*.

Часто большую важность представляет сам факт доказательства существования либо несуществования решения уравнения (3.3), а в случае существования — его единственности или неединственности.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), изучаемые а курсе линейной алгебры, представляют собой частный случай операторного уравнения первого рода.

Пусть теперь $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $y \in \mathcal{X}$. Задачу о нахождении элемента $x \in \mathcal{X}$, обращающего в тождество соотношение

$$x = \mathfrak{A}x + y\,, \tag{3.4}$$

называют *операторным уравнением второго рода*.

Уравнение (3.4) может быть записано в виде

$$\hat{\mathfrak{A}} = y\,, \quad \text{где} \;\; \hat{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{I} - \mathfrak{A})$$

и таким образом сведено к уравнению первого рода (3.3), однако тот факт, что в данном случае пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ совпадают, позволяет получить некоторые дополнительные результаты.

Упражнения

Упражнение 3.1. *Найти $\mathfrak{G}^n$, где $\mathfrak{G}$ — оператор из упражнения* 1.1. *Каков характер сходимости последовательности $\{\mathfrak{G}^n\}_{n=1}^{\infty}$?*

Упражнение 3.2. *Для того же оператора $\mathfrak{G}$ найти $\mathfrak{G}^{-1}$ и $\mathfrak{G}^{-n} = (\mathfrak{G}^n)^{-1}$.*

Упражнение 3.3. *Проверить, являются ли взаимно однозначными операторы $\mathfrak{A}_n$ из упражнения* 2.2.

Упражнение 3.4. *На множестве алгебраических полиномов степени не выше второй решить уравнение $\mathfrak{A}x = 2t^2$, где $\mathfrak{A}$ — оператор из упражнения* 1.2.

Упражнение 3.5. *Оператор $\mathfrak{A} : \mathbf{m} \to \mathbf{m}$ задан формулой*

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots) = (x_1, x_1 + x_2, x_3, x_3 + x_4 \ldots)\,.$$

Найти оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ и решить уравнение $\mathfrak{A}x = (1, 1, 1, \ldots)$.

Лекция 4

Левый и правый обратный операторы, их связь с решением операторных уравнений. Сопряженные и самосопряженные операторы. Операторы ортогонального проектирования.

4.1 Левый и правый обратные операторы

Пусть операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таковы, что $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и $\mathfrak{B} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$.

Определение 4.1.1. *Оператор $\mathfrak{B}$ называется* правым обратным *к оператору $\mathfrak{A}$ (этот факт обозначается $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_R^{-1}$), если $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{I}_\mathcal{Y}$. Оператор $\mathfrak{B}$ называется* левым обратным *к оператору $\mathfrak{A}$ (этот факт обозначается $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_L^{-1}$), если $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{I}_\mathcal{X}$.*

Непосредственно из данного определения и определения 3.2.1 вытекает, что *обратный оператор существует тогда и только тогда, когда существуют и равны левый и правый операторы, при этом $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}_L^{-1} = \mathfrak{A}_R^{-1}$.*

Как и оператор $\mathfrak{A}^{-1}$, оба односторонних оператора (если существуют) удовлетворяют свойству линейности.

Лемма 4.1.1. *Если оператор $\mathfrak{A}$ непрерывен и у него существуют оба обратных оператора $\mathfrak{A}_L^{-1}$ и $\mathfrak{A}_R^{-1}$, то $\mathfrak{A}_L^{-1} = \mathfrak{A}_R^{-1}$ и, следовательно, $\mathfrak{A}$ является обратимым.*

Теорема 4.1.1. *Если существует оператор $\mathfrak{A}_R^{-1}$, то уравнение первого рода* (3.3) *имеет решение $x = \mathfrak{A}_R^{-1}y$ (утверждение существования). Если существует оператор $\mathfrak{A}_L^{-1}$, то уравнение* (3.3) *имеет* не более одного решения *(утверждение единственности).*

Доказательство. Пусть существует $\mathfrak{A}_R^{-1}$. Воспользовавшись тем, что по определению $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_R^{-1} = \mathfrak{I}_\mathcal{Y}$, можно записать

$$y = \mathfrak{I}_\mathcal{Y} y = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_R^{-1}y)\,.$$

Отсюда видно, что $x = \mathfrak{A}_R^{-1}y$ является решением уравнения (3.3).

Пусть теперь существует $\mathfrak{A}_L^{-1}$. Исследуем ядро исходного оператора $\mathfrak{A}$. Выберем в нем произвольный элемент $x_0 \in \mathfrak{Ker}(\mathfrak{A})$. По определению ядра, $\mathfrak{A}x_0 = 0$, тогда $\mathfrak{A}_L^{-1}\mathfrak{A}x_0 = \mathfrak{A}_L^{-1}0 = 0$, а так как $\mathfrak{A}_L^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{I}_\mathcal{X}$, то $\mathfrak{I}_\mathcal{X} x_0 = 0$ и, следовательно, $x_0 = 0$. Итак, в ядре $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{A})$ не может быть ненулевых элементов, оператор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию теоремы 3.2.1 и значит, является взаимно однозначным.

Рассмотрим уравнение (3.3). Для его правой части $y \in \mathcal{Y}$ возможны два варианта: либо $y \in \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$, либо $y \notin \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$. В первом случае (3.3) имеет единственное решение, так как в силу взаимной однозначности образу y соответствует единственный прообраз. Во втором случае уравнение вовсе не имеет решения, так как прообраза для y не существует. Тем самым второе утверждение теоремы доказано. □

Следствие. *Если оператор непрерывно обратим, то уравнение первого рода* (3.3) *имеет решение, и притом единственное, при любой правой части* $y \in \mathcal{Y}$.

Теорема 4.1.2. *Пусть пространство* $\mathcal{X}$*, на котором определен взаимно однозначный оператор* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$*, полно, и* $\|\mathfrak{A}\| < 1$. *Тогда оператор* $(\mathfrak{I} - \mathfrak{A})$ *непрерывно обратим и следовательно, операторное уравнение второго рода* (3.4) *имеет единственное решение. При этом справедливы оценки*

$$\|(\mathfrak{I} - \mathfrak{A})^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathfrak{A}\|}\,; \tag{4.1}$$

$$\|\mathfrak{I} - (\mathfrak{I} - \mathfrak{A})^{-1}\| \leqslant \frac{\|\mathfrak{A}\|}{1 - \|\mathfrak{A}\|}\,. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $\|\mathfrak{A}\| = q < 1$. Рассмотрим в $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ операторный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}^n\,, \quad \mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{I}\,. \tag{4.3}$$

Для его общего члена справедливо $0 \leqslant \|\mathfrak{A}^n\| \leqslant \|\mathfrak{A}\|^n = q^n$, а так как числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ при $0 \leqslant q < 1$ сходится, то ряд (4.3) сходится абсолютно и, по теореме 3.1.2, равномерно. Пусть его сумма равна $\mathfrak{S}$. В силу полноты $\mathcal{X}$, пространство $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ полно (по теореме 2.2.3) и $\mathfrak{S} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, так что $\mathfrak{S}$ непрерывен.

Обозначим за $\mathfrak{S}_n$ n-ую частичную сумму ряда (4.3). Заметим, что

$$(\mathfrak{I} - \mathfrak{A})\mathfrak{S}_n = \mathfrak{I} + \mathfrak{A} + \ldots + \mathfrak{A}^n - \mathfrak{A}(\mathfrak{I} + \mathfrak{A} + \ldots + \mathfrak{A}^{n-1} + \mathfrak{A}^n) = \mathfrak{I} - \mathfrak{A}^{n+1}\,;$$
$$\mathfrak{S}_n(\mathfrak{I} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{I} + \mathfrak{A} + \ldots + \mathfrak{A}^n - (\mathfrak{I} + \mathfrak{A} + \ldots + \mathfrak{A}^{n-1} + \mathfrak{A}^n)\mathfrak{A} = \mathfrak{I} - \mathfrak{A}^{n+1}\,.$$

Поскольку $0 \leqslant \|\mathfrak{A}^{n+1}\| \leqslant q^{n+1}$, то $\|\mathfrak{A}^{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$, и в пределе получаем

$$(\mathfrak{I} - \mathfrak{A})\mathfrak{S} = \mathfrak{I}\,;\ \mathfrak{S}(\mathfrak{I} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{I} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{S} = (\mathfrak{I} - \mathfrak{A})^{-1}\,.$$

Это означает, что оператор $\mathfrak{I} - \mathfrak{A}$ обратим, а в силу полноты $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ он обратим непрерывно. Уравнение (3.4), таким образом, в силу предыдущей теоремы имеет решение и притом единственное. Заметим, что $(\mathfrak{I} - \mathfrak{A})^{-1} = \mathfrak{S}$.

Соотношения (4.1)—(4.2) получаются из формулы суммы геометрической прогрессии

$$\|\mathfrak{S}_n\| \leqslant 1 + \|\mathfrak{A}\| + \ldots + \|\mathfrak{A}\|^n = \frac{1 - \|\mathfrak{A}\|^{n+1}}{1 - \|\mathfrak{A}\|}\,;$$
$$\|\mathfrak{I} - \mathfrak{S}_n\| \leqslant \|\mathfrak{A}\| + \ldots + \|\mathfrak{A}\|^n = \frac{1 - \|\mathfrak{A}\|^n}{1 - \|\mathfrak{A}\|}\|\mathfrak{A}\|$$

переходом к пределу при $n \to \infty$. □

4.2 Сопряженные и самосопряженные операторы

Пусть $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и на пространстве $\mathcal{Y}$ определен некоторый линейный функционал $\mathfrak{f} \in \mathcal{Y}^*$. Определим функционал $\mathfrak{g} \in \mathcal{X}^*$ формулой

$$\mathfrak{g}(x) = (x, g) = (\mathfrak{A}x, f) = \mathfrak{f}(\mathfrak{A}x)\,. \tag{4.4}$$

Для него $\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \mathcal{X}$; функционал $\mathfrak{g}$ линеен и ограничен:

$$|\mathfrak{g}(x)| = |(\mathfrak{A}x, f)| \leqslant \|\mathfrak{A}x\| \cdot \|f\| \leqslant (\|\mathfrak{A}\| \cdot \|f\|) \|x\| .$$

Такой функционал $\mathfrak{g} \in \mathcal{X}^*$ можно поставить в соответствие каждому элементу $\mathfrak{f} \in \mathcal{Y}^*$. В силу только что перечисленных свойств соответствие будет являться линейным ограниченным оператором, действующим из $\mathcal{Y}^*$ в $\mathcal{X}^*$.

Определение 4.2.1. *Оператор* $\mathfrak{A}^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$*, определенный в соответствии с* (4.4)*, называется* сопряженным *к оператору* $\mathfrak{A}$.

Лемма 4.2.1. *Если* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$*, то* $\mathfrak{A}^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$*, причем* $\|\mathfrak{A}\| = \|\mathfrak{A}^*\|$.

Доказательство. (На самостоятельное изучение.) □

По определению (4.4) функционала $\mathfrak{g}$, $(x, g) = (\mathfrak{A}x, f)$. С другой стороны, по определению сопряженного оператора $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{A}^*\mathfrak{f}$. Подставляя это равенство в (4.4), получим $(x, f) = (x, \mathfrak{A}^* f)$. Отсюда следует основное соотношение, связывающее исходный и сопряженный операторы:

$$(\mathfrak{A}x, f) = (x, \mathfrak{A}^* f) .$$

Для тождественного оператора имеем $(\mathfrak{I}x, f) = (x, f)$. С другой стороны, $(\mathfrak{I}x, f) = (x, \mathfrak{I}^* f)$, откуда $(x, f) = (x, \mathfrak{I}^* f)$. В силу произвольности x и f, это означает что $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^*$. Аналогично, для нулевого оператора $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}^*$.

Определение 4.2.2. *Если* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$*, где* $\mathcal{H}$ *— гильбертово пространство, и* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$*, то оператор* $\mathfrak{A}$ *называется* самосопряженным *или* эрмитовым.

Лемма 4.2.2. *Для самосопряженного оператора* $\mathfrak{A}$ *величина* $(\mathfrak{A}x, x)$ *является вещественной, даже если пространство* $\mathcal{X}$ *построено над комплексным полем.*

Доказательство. С одной стороны, $(\mathfrak{A}x, x) = (x, \mathfrak{A}^* x) = (x, \mathfrak{A}x)$. С другой стороны, $(\mathfrak{A}x, x) = \overline{(x, \mathfrak{A}x)}$. Это означает, что $(x, \mathfrak{A}x) = \overline{(x, \mathfrak{A}x)}$, но для комплексных чисел равенство $z = \overline{z}$ возможно тогда и только тогда, когда $z \in \mathbb{R}$. □

Лемма 4.2.3. *Если* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$*, то* $\|\mathfrak{A}\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(\mathfrak{A}x, x)|$.

Определение 4.2.3. *Самосопряженный оператор* $\mathfrak{A}$ *называется* неотрицательным*, если* $\forall x \in \mathcal{H} \ : \ (\mathfrak{A}x, x) \geqslant 0$.

Теорема 4.2.1. *Если самосопряженный оператор* $\mathfrak{A}$ *неотрицателен, то имеет место* обобщенное неравенство Коши–Буняковского*:*

$$|(\mathfrak{A}x, y)| \leqslant \sqrt{(\mathfrak{A}x, x)} \sqrt{(\mathfrak{A}y, y)} .$$

4.3 Операторы ортогонального проектирования

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ выбрано некоторое подпространство $\mathcal{M}$. Как известно, любому элементу $x \in \mathcal{H}$ можно поставить в соответствие элемент $\hat{x} \in \mathcal{M}$, являющийся ортогональной проекцией x на $\mathcal{M}$. Таким образом, имеет место некоторое отображение $\mathfrak{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$, называемое *ортогональным проектором* $\mathcal{H}$ на $\mathcal{M}$.

Можно показать, что это отображение обладает следующим свойствами:

1. Ортогональный проектор является линейным оператором.
2. Сужение ортогонального проектора на $\mathcal{M}$ является тождеством.
3. Ортогональный проектор непрерывен на $\mathcal{H}$ и если $\mathcal{M} \neq \{0\}$, то $\|\mathfrak{P}\| = 1$.
4. Ортогональный проектор удовлетворяет равенству $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}$.
5. Оператор ортогонального проектирования является самосопряженным.
6. Оператор ортогонального проектирования неотрицателен.
7. $x \in \mathcal{M} \iff \|\mathfrak{P}x\| = \|x\|$.
8. $(\mathfrak{P}x, x) \leqslant \|x\|^2$.

Теорема 4.3.1. *Пусть $\mathfrak{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, причем $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$. Тогда существует некоторое подпространство $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, для которого $\mathfrak{A}$ является ортогональным проектором.*

Упражнения

Упражнение 4.1. *Оператор $\mathfrak{A} : \mathbf{m} \to \mathbf{m}$ задан формулой*

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, \ldots)\,.$$

Какой из операторов $\mathfrak{A}_L^{-1}$, $\mathfrak{A}_R^{-1}$ существует? Найти этот оператор. Единственен ли он? Если нет, то найти несколько вариантов.

Упражнение 4.2. *Рассмотреть ту же задачу для оператора $\mathfrak{B} : \mathbf{m} \to \mathbf{m}$, заданного формулой*

$$\mathfrak{B}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, x_3, x_5, \ldots)\,.$$

Упражнение 4.3. *Найти сопряженные операторы для $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ из упражнений* 4.1–4.2 *и для оператора $\mathfrak{V}$ из упражнения* 1.4.

Упражнение 4.4. *Оператор $\mathfrak{A} : \mathbf{C}[a;b] \to \mathbf{C}[a;b]$ задан формулой*

$$\mathfrak{A}x(t) = \int_a^b \phi(t,s)x(s)\,ds\,,$$

где функция ϕ непрерывна на $[a;b] \times [a;b]$. Найти оператор $\mathfrak{A}^*$.

Воспользовавшись данным результатом, определить условия, при которых оператор $\mathfrak{A}_0$ с функцией $\phi(t,s) = (\alpha t + \beta s)^n$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$), будет самосопряженным.

Упражнение 4.5. *Доказать свойства* 1–8 *ортогональных проекторов.*

Упражнение 4.6. *В пространстве* $\mathbf{L}_2[-1;1]$ *построить ортогональный проектор на подпространство*

$$\mathcal{M} = \{x(t) \mid x(t) = \alpha t,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Упражнение 4.7. *Доказать, что если* $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$*, то ортогональный проектор не является взаимно однозначным.*

Лекция 5

Резольвента, спектр, собственные значения и собственные элементы линейного оератора.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и в нем действует непрерывный оператор $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$, причем область его определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ всюду плотна в $\mathcal{X}$. Введем в рассмотрение оператор $\mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I}$.

Определение 5.0.1. *Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется* регулярной точкой *оператора $\mathfrak{A}$, если оператор $\mathfrak{A}_\lambda$ непрерывно обратим. При этом оператор $\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A})$ называется* резольвентой *оператора $\mathfrak{A}$ в точке λ. Все множество регулярных точек оператора $\rho(\mathfrak{A}) \subset \mathbb{C}$ называется его* резольвентным множеством.

Пусть λ и γ — две регулярные точки оператора $\mathfrak{A}$. Тогда

$$\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A}) = \underbrace{\mathfrak{R}_\gamma(\mathfrak{A})(\mathfrak{A} - \gamma\mathfrak{I})}_{\mathfrak{I}}\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A}), \quad \mathfrak{R}_\gamma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}_\gamma(\mathfrak{A})\underbrace{(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I})\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A})}_{\mathfrak{I}},$$

откуда следует

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A}) - \mathfrak{R}_\gamma(\mathfrak{A}) &= \mathfrak{R}_\gamma(\mathfrak{A})\left[(\mathfrak{A} - \gamma\mathfrak{I}) - (\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I})\right]\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A}) = \\ &= \mathfrak{R}_\gamma(\mathfrak{A})\left[(\lambda - \gamma)\mathfrak{I}\right]\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A}) = \\ &= (\lambda - \gamma)\mathfrak{R}_\gamma(\mathfrak{A})\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A}).\end{aligned}$$

Эта формула называется *формулой Гильберта*.

Лемма 5.0.1. *Резольвентное множество $\rho(\mathfrak{A}) \subset \mathbb{C}$ всегда является открытым.*

Определение 5.0.2. *Дополнение к резольвентному множеству оператора в комплексной плоскости $S(\mathfrak{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathfrak{A})$ называется* спектром *оператора.*

Будучи дополнением к открытому множеству, спектр оператора всегда замкнут.

Предста́вим спектр $S(\mathfrak{A})$ в виде объединения трех взаимно непересекающихся подмножеств:

$$S(\mathfrak{A}) = S_1(\mathfrak{A}) \cup S_2(\mathfrak{A}) \cup S_3(\mathfrak{A}) \quad (S_i(\mathfrak{A}) \cap S_j(\mathfrak{A}) = \varnothing \text{ при } i \neq j), \text{ где}$$

- $S_1(\mathfrak{A})$ — множество таких λ, что оператор $\mathfrak{A}_\lambda$ не является обратимым;
- $S_2(\mathfrak{A})$ — множество таких λ, что оператор $\mathfrak{A}_\lambda$ обратим и $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_\lambda^{-1})$ всюду плотно в $\mathcal{X}$, но обратный оператор $\mathfrak{R}_\lambda(\mathfrak{A})$ не ограничен (т.е., обратимость не непрерывна);
- $S_3(\mathfrak{A})$ — множество таких λ, что оператор $\mathfrak{A}_\lambda$ обратим, но $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_\lambda^{-1})$ не является всюду плотным в $\mathcal{X}$ множеством.

Определение 5.0.3. *Множества* $S_1(\mathfrak{A})$, $S_2(\mathfrak{A})$ *и* $S_3(\mathfrak{A})$ *называются* точечным *(*дискретным*)*, непрерывным *и* остаточным *спектрами оператора* $\mathfrak{A}$ *соответственно.*

Пусть $\lambda \in S_1(\mathfrak{A})$. Так как оператор $\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I}$ не является обратимым, то он не является взаимно однозначным и по теореме единственности в его ядре $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I})$ содержится хотя бы один ненулевой элемент x_0. По определению ядра, $(\mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I})x_0 = 0$, откуда

$$\mathfrak{A}x_0 = \lambda x_0\,. \tag{5.1}$$

Определение 5.0.4. *Присутствующее в соотношении* (5.1) *число* λ *называется* собственным числом (значением) *оператора* $\mathfrak{A}$*, соответствующий элемент* $x_0 \in \mathcal{X}$ *— его* собственным элементом*, а пара* (λ, x_0) — собственной парой *оператора* $\mathfrak{A}$*. При этом число* $k = \dim \mathfrak{Ker}(\mathfrak{A}_\lambda)$ *называется* кратностью *собственного значения* λ*. Собственное значение кратности* 1 *называется* простым.

Для тождественного оператора $\mathfrak{I}$ имеем $\mathfrak{I}_\lambda = \mathfrak{I} - \lambda\mathfrak{I} = (1-\lambda)\mathfrak{I}$. Единственным значением λ, при котором $\mathfrak{I}_\lambda$ перестает быть обратимым, является 1, при этом $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{O}$ и $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{I}_1) = \mathfrak{Ker}(\mathfrak{O}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{I})$. Так как $\mathfrak{D}(\mathfrak{I})$ всюду плотно в $\mathcal{X}$, то кратность этого собственного значения равна размерности пространства.

Возможна ситуация, когда *все* числа комплексной плоскости $\mathbb{C}$ являются собственными значениями оператора. В качестве примера достаточно рассмотреть оператор $\mathfrak{A}x(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, действующий в пространстве $\mathbf{L}_2[a;b]$.

Лемма 5.0.2. *Линейная комбинация линейно независимых собственных элементов, соответствующих одному и тому же собственному значению, также является собственным элементом, соответствующим этому собственному значению.*

Следствие. *Собственные элементы одного собственного значения образуют линейное многообразие.*

Лемма 5.0.3. *Если* (λ, x) *— собственная пара оператора* $\mathfrak{A}$*, то* (λ^n, x) *является собственной парой оператора* $\mathfrak{A}^n$ *при любом натуральном* n*.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что оно справедливо и для некоторого $n > 1$. Тогда

$$\mathfrak{A}^{n+1}x = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}^n x) = \mathfrak{A}(\lambda^n x) = \lambda^n \mathfrak{A}x = \lambda^n \cdot \lambda x = \lambda^{n+1}x.$$

Следовательно, по индукции утверждение леммы справедливо при любом $n \in \mathbb{N}$. □

Следствие. *Если* $p_n(t)$ *— многочлен степени* n*, а* (λ, x) *является собственной парой оператора* $\mathfrak{A}$*, то* $(p_n(\lambda), x)$ *является собственной парой оператора* $p_n(\mathfrak{A})$*.*

Замечание. *Если пространство* $\mathcal{X}$ *построено над вещественным полем* $\mathbb{R}$*, то комплексное число* $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\tau$ *будет собственым значением оператора* $\mathfrak{A}$*, если существуют такие элементы* $x, y \in \mathcal{X}$*, для которых*

$$\begin{cases} \mathfrak{A}x = \sigma x - \tau y \\ \mathfrak{A}y = \sigma y + \tau x \end{cases}. \tag{5.2}$$

Определение 5.0.5. *Величина* $\mu(\mathfrak{A}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\mathfrak{A}^n\|}$ *(если она существует) называется* спектральным радиусом *оператора* $\mathfrak{A}$.

В силу неравенства $\|\mathfrak{A}^n\| \leqslant \|\mathfrak{A}\|^n$, если $\mu(\mathfrak{A})$ существует, то $\mu(\mathfrak{A}) \leqslant \|\mathfrak{A}\|$.

Теорема 5.0.2. *У непрерывного оператора спектральный радиус существует всегда, причем*

$$\mu(\mathfrak{A}) = \sup_{\lambda \in S(\mathfrak{A})} |\lambda|.$$

Следствие. $\mu(\mathfrak{A}^n) = \mu^n(\mathfrak{A})$; $\mu(\alpha\mathfrak{A}) = |\alpha|\mu(\mathfrak{A})$

Замечание. *Возможна ситуация, когда* $\mu(\mathfrak{A}) = 0$*, но при этом* $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{O}$*. Поэтому спектральный радиус не может выступать в качестве нормы оператора.*

Определение 5.0.6. *Оператор, спектральный радиус которого равен нулю, называется* нильпотентным.

Тождественный оператор $\mathfrak{I}$, будучи непрерывным, имеет единичный спектральный радиус, совпадающий с модулем его единственного собственного значения: $\mu(\mathfrak{I}) = 1$. Следовательно, он не является нильпотентным.

Теорема 5.0.3. *Если оператор* $\mathfrak{A}$ *непрерывен, то* $\big\{\lambda \;\big|\; |\lambda| > \|\mathfrak{A}\|\big\} \subset \rho(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Точка $\lambda = 0$ по определению не принадлежит множеству $\rho(\mathfrak{A})$, а для всех $\lambda \neq 0$ оператор $\mathfrak{A}_\lambda$ можно представить в виде

$$\mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{A} - \lambda\mathfrak{I} = -\lambda\left(\mathfrak{I} - \frac{1}{\lambda}\mathfrak{A}\right).$$

Отсюда видно, что если $|\lambda| > \|\mathfrak{A}\|$, то $\|\frac{1}{\lambda}\mathfrak{A}\| = \|\mathfrak{A}\|/|\lambda| < 1$, и по теореме 4.1.2, оператор $\mathfrak{A}_\lambda$ является непрерывно обратимым. Это и означает, что $\lambda \in \rho(\mathfrak{A})$. □

Теорема 5.0.4. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— самосопряженный оператор. Тогда* $\mu(\mathfrak{A}) = \|\mathfrak{A}\|$.

Теорема 5.0.5 (о четырех шарах). *Пусть оператор* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ *непрерывно обратим. Тогда множества*

$$D_1 = \{\mathfrak{B} \;\big|\; \|\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\| < \|\mathfrak{A}^{-1}\|^{-1}\}$$
$$D_2 = \{\mathfrak{B} \;\big|\; \|\mathfrak{A}^{-1} - \mathfrak{B}\| < \|\mathfrak{A}\|^{-1}\}$$

состоят из обратимых операторов.

При этом, если $\mathfrak{B} \in D_1$*, то*

$$\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\mathfrak{A}^{-1}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\right]^n\mathfrak{A}^{-1}$$

и справедливо неравенство

$$\|\mathfrak{B}^{-1} - \mathfrak{A}^{-1}\| \leqslant \frac{\|\mathfrak{A}^{-1}\|^2\|\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\|}{1 - \|\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\| \cdot \|\mathfrak{A}^{-1}\|}.$$

Если же $\mathfrak{B} \in D_2$, *то*

$$\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{A}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mathfrak{A}^{-1}-\mathfrak{B})\mathfrak{A}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^{-1}-\mathfrak{B})\right]^n\mathfrak{A}$$

и справедливо неравенство

$$\|\mathfrak{B}^{-1}-\mathfrak{A}\| \leqslant \frac{\|\mathfrak{A}\|^2\|\mathfrak{A}^{-1}-\mathfrak{B}\|}{1-\|\mathfrak{A}^{-1}-\mathfrak{B}\|\cdot\|\mathfrak{A}\|}\,.$$

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ *— оператор, зависящий от параметра, причем* $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ *обратим. Пусть*

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}:\ \mathfrak{B}(\varepsilon)\in D_1 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathfrak{B}(\varepsilon)-\mathfrak{A}\| = 0.$$

Тогда $\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathfrak{B}^{-1}(\varepsilon)-\mathfrak{A}^{-1}\| = 0$.

Упражнения

Упражнение 5.1. *Показать, что оператор* $\mathfrak{A}x(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ *в пространстве* $\mathbf{L}_2[a;b]$ *действительно имеет своими собственными значениями все комплексные числа. Какова кратность любого такого собственного значения?*

Упражнение 5.2. *Построить пример ненулевого нильпотентного оператора.*

Упражнение 5.3. *Найти собственные значения и собственные элементы оператора* $\mathfrak{A}$ *из упражнения* 3.5.

Упражнение 5.4. *Предполагая, что* $\mathfrak{V}:\mathbf{c}\to\mathbf{m}$, *найти собственные значения и собственные элементы оператора* $\mathfrak{V}$ *из упражнения* 1.4.

Упражнение 5.5. *Вывести условия* (5.2) *для комплексного собственного значения у оператора в вещественном пространстве.*

Ответы и указания к упражнениям

1.1. $\mathfrak{Ker}(\mathfrak{A}) = \{0\}$; $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) \neq \mathcal{X}$. Для доказательства ограниченности покажите, что $\|\mathfrak{A}x\| = \|x\|$. **1.2**. Воспользуйтесь тем, что $|x(t) - x_0(t)| \leqslant \delta$ (из определения непрерывности) и $0 \leqslant t \leqslant 1$. **1.4**. а) нет; б) да.

2.1. Запишите $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathfrak{A}_n x - \mathfrak{A}x, y) = 0$ и для скалярного произведения воспользуйтесь неравенством Коши–Буняковского. **2.2**. Покажите, что $\|\mathfrak{A}_n\| = 1$, тогда равномерная сходимость $\mathfrak{A}_n$ к нулевому оператору невозможна. Для доказательства сильной сходимости $\mathfrak{A} \to \mathfrak{O}$ воспользуйтесь тем фактом, что все функции $x(t) \in \mathcal{X}$ непрерывны в нуле справа, а значит, любая из них сколь угодно мала на некотором отрезке $[0;\delta]$. **2.3**. Например, оператор $\mathfrak{A} : \mathbf{C}[0;1] \to \mathbb{R}$, заданный формулой $\mathfrak{A}x(t) = x(0)$. Его норма равна 1, однако для $x(t) = t$ имеем $\|x\| = 1$, $\|\mathfrak{A}x\| = 0$. **2.4**. $\|\mathfrak{G}\| = 1$, $\|\mathfrak{V}\| = 2$.

3.1. Оператор $\mathfrak{G}^n$ задается формулой

$$\mathfrak{G}^n x(t) = \begin{cases} x(2^n t)\,, & \text{если } t \in [0; \frac{1}{2^n}]\ ; \\ 0\,, & \text{если } t \in (\frac{1}{2^n}; 1]\,. \end{cases}$$

Последовательность $\mathfrak{G}^n$ сходится к нулевому оператору сильно, но не равномерно. **3.2**. $\mathfrak{G}^{-1}x(t) = x(\frac{t}{2})$. $\mathfrak{G}^{-n}x(t) = x(\frac{t}{2^n})$. **3.3**. Взаимная однозначность имеет место только для $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{I}$. **3.4**. Решением является $x(t) = 15t^2 - 18t + \frac{9}{2}$. Воспользуйтесь методом неопределенных коэффициентов. **3.5**. Оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ задается формулой

$$\mathfrak{A}^{-1}(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots) = (y_1, y_2 - y_1, y_3, y_4 - y_3, \ldots)\,.$$

Решением уравнения является $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$.

4.1. Существует (но не единственен) только $\mathfrak{A}_L^{-1}$. Например,

$$\mathfrak{A}_L^{-1}x = (x_1, x_3, x_5, \ldots)\,;$$
$$\mathfrak{A}_L^{-1}x = (x_2, x_4, x_6, \ldots)\,.$$

4.2. Существует (но не единственен) только $\mathfrak{B}_R^{-1}$. Он задается формулой

$$\mathfrak{B}_R^{-1}x = (x_1, \lambda_1, x_2, \lambda_2, x_3, \lambda_3, \ldots)\,,$$

где $\sup_n |\lambda_n| < \infty$. **4.3**. Сопряженные операторы задаются формулами:

$$\mathfrak{A}^* y = (y_1 + y_2, y_3 + y_4, y_5 + y_6, \ldots)\,;$$
$$\mathfrak{B}^* y = (y_1, 0, y_2, 0, y_3, 0, \ldots)\,;$$
$$\mathfrak{V}^* y = (y_1, 2y_2, y_3, 2y_4, y_5, \ldots) = \mathfrak{V}y\,.$$

Таким образом, $\mathfrak{V}$ является самосопряженным. **4.4**. Сопряженный оператор задается формулой

$$\mathfrak{A}^* y = \int_a^b \phi(s,t) y(s)\, ds\,.$$

Самосопряженность имеет место при $\phi(t,s) = \phi(s,t)$, таким образом, оператор $\mathfrak{A}_0$ будет самосопряженным при $\alpha^n = \beta^n$. **4.6**. Оператор ортогонального проектирования задается формулой

$$\mathfrak{P} x(t) = \frac{3t}{b^3 - a^3} \int_a^b x(s)\, ds\,.$$

Указание: рассмотрите $\|x(t) - \alpha t\|^2$. **4.7**. Рассмотрите $x \notin \mathcal{M}$ и линейное многообразие $\alpha(x - \mathfrak{P}x)$, где α — скаляр.

5.1. Рассмотрите дифференциальное уравнение $x'(t) = \lambda x(t)$, считая λ произвольной константой. **5.2**. Например, оператор $\mathfrak{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с единичной нормой, заданный формулой $\mathfrak{A}(x_1, x_2) = (x_2, 0)$.

Приложение. Нормированные пространства

Пространство	Описание
$\mathbf{E}^m$	Евклидово вещественное пространство размерности m
$\mathbf{l}^m$ $\mathbf{c}^m$ $\mathbf{l}_p^m$	Вещественные m-мерные пространства с различными нормами
$\mathbf{l}_p$	Абсолютно сходящиеся с p-ой степенью числовые ряды
$\mathbf{m} = \mathbf{l}_\infty$	Ограниченные числовые последовательности
$\mathbf{c}$	Сходящиеся числовые последовательности
$\mathbf{c}_0$	Сходящиеся к нулю числовые последовательности
$\mathbf{C}[a;b]$	Функции, непрерывные на отрезке $[a;b]$
$\mathbf{C}^p[a;b]$	Функции, p раз непрерывно дифференцируемые на $[a;b]$
$\mathbf{L}_p[a;b]$	Функции, абсолютно интегрируемые на $[a;b]$ с p-ой степенью

Пространство	Элемент x	Норма $\|x\|$	Примечание
$\mathbf{E}^m$	$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$	$\left(\sum_{k=1}^m x_k^2\right)^{1/2}$	
$\mathbf{l}^m$		$\sum_{k=1}^m \lvert x_k\rvert$	
$\mathbf{c}^m$		$\max_{1\leqslant k\leqslant m} \lvert x_k\rvert$	
$\mathbf{l}_p^m$		$\left(\sum_{k=1}^m \lvert x_k\rvert^p\right)^{1/p}$	$\mathbf{l}_1^m = \mathbf{l}^m$; $\mathbf{l}_2^m = \mathbf{E}^m$
$\mathbf{l}_p$	$(x_1, x_2, x_3, \ldots)$	$\left(\sum_{k=1}^\infty \lvert x_k\rvert^p\right)^{1/p}$	$\mathbf{l}_p \cong \mathbf{l}_p^\infty$
$\mathbf{m} = \mathbf{l}_\infty$		$\sup_{k\in\mathbb{N}} \lvert x_k\rvert$	$\mathbf{m} = \mathbf{l}_\infty \cong \mathbf{c}^\infty$
$\mathbf{c}$			$\mathbf{c} \subset \mathbf{m} = \mathbf{l}_\infty$
$\mathbf{c}_0$			$\mathbf{c}_0 \subset \mathbf{c}$
$\mathbf{C}[a;b]$	$x(t)$	$\max_{[a;b]} \lvert x(t)\rvert$	
$\mathbf{C}^p[a;b]$		$\sum_{k=0}^p \max_{[a;b]} \lvert x^{(k)}(t)\rvert$	$\mathbf{C}^0[a;b] = \mathbf{C}[a;b]$ $\mathbf{C}^p[a;b] \subset \mathbf{C}[a;b]$
$\mathbf{L}_p[a;b]$		$\left(\int_a^b \lvert x(t)\rvert^p\,dt\right)^{1/p}$	

Литература

[1] Банах С. **Теория линейных операций.** — Ижевск: R&C Dynamics, 2001.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. **Элементы теории функций и функционального анализа.** — М.: Наука, 1989.

[3] Лебедев В.И. **Функциональный анализ и вычислительная математика.** — М.: Физматлит., 2000.

[4] Садовничий В.А. **Теория операторов** — М.: Высш. шк., 1999.

[5] Треногин В.А. **Функциональный анализ** — М.: Наука., 1980.

Содержание