Введение

Теория дифференциальных уравнений — это большой раздел современной математики, состоящий из двух обширных областей: теории *обыкновенных* дифференциальных уравнений и теории уравнений *в частных производных*. Как правило, основные законы, управляющие тем или иным процессом, можно описать подобными уравнениями — это относится к таким областям, как механика сплошной среды, химические реакции, электромагнитные явления, финансовая математика и т.д.

Теория уравнений с частными производными возникла на основе конкретных физических задач, приводящих к исследованию отдельных уравнений с частными производными, получившими название *уравнений математической физики*. Это направление в анализе берет своё начало с середины XVIII века. В основу этой науки легли работы Даниила Бернулли (1700-1782), Леонарда Эйлера (1707-1783), Жана Даламбера (1717-1783), Жозефа Лагранжа (1736-1813), Пьера Лапласа (1749-1827), Жана Фурье (1768-1830), Симона Пуассона (1781-1840) и других учёных.

Двумя основными чертами теории дифференциальных уравнений можно назвать

- тесную связь с приложениями (теория дифференциальных уравнений, как раздел математики, выступает неотъемлемой частью естествознания, основывающейся на выводах и понимании количественных и качественных закономерностей, составляющих содержание наук о природе);
- не менее тесную связь с другими разделами математики, особенно функциональным анализом и алгеброй.

В данном пособии рассматриваются аналитические методы решения задач математической физики, большинство которых взято из сборников [3,4].

Обозначения

Для обозначения совокупности координат будем пользоваться обозначением $\mathbf{r}$ (с использованием прямого жирного шрифта):

$$\mathbf{r} = (x, y)^{\mathrm{T}} \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}.$$

Норму этого вектора будем обозначать той же буквой прямого светлого начертания:

$$\mathrm{r} = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

В ряде случаев также оказывается удобным использование символического дифференциального оператора Гамильтона ∇ (набла, гамильтониан):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)^{\mathrm{T}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^{\mathrm{T}}.$$

С его использованием может быть записан ряд широко употребляющихся в анализе дифференциальных операторов, например

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \operatorname{div} F = \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad \operatorname{rot} F = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Через гамильтониан также определяется оператор Лапласа:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla^{\mathrm{T}} \nabla f \ .$$

В ряде случаев мы будем использовать «упрощённые» обозначения для частных производных, например

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} \quad \text{и т.п.}$$

Приведение уравнений к каноническому виду

Мы будем рассматривать линейные дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(...) = 0 . \qquad (1)$$

Та его часть, которая содержит вторые производные, может быть записана в следующей матрично-векторном виде:

$$\nabla^T \begin{bmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ B(x, y) & C(x, y) \end{bmatrix} \nabla u .$$

Это дифференциальная квадратичная форма, матрица которой называется матрицей старших коэффициентов уравнения (1).

Каноническим видом уравнения (1) называется такая форма его записи, в которой матрица старших коэффициентов имеет диагональный вид. Привести уравнение к такому виду можно с помощью замены переменных; новые переменные могут быть найдены с помощью метода характеристик.

Уравнение характеристик для (1) имеет вид

$$A(x, y) \, dy^2 - 2B(x, y) \, dx \, dy + C(x, y) \, dx^2 = 0. \qquad (2)$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка, квадратное относительно дифференциалов. Его алгебраическое решение приводит к одному из трёх случаев:

- два различных вещественных решения (гиперболический тип уравнения (1));
- одно вещественное решение (параболический тип уравнения (1));

- два комплексно-сопряжённых решения (эллиптический тип уравнения (1)).

В каждом из этих случаев интегрирование решений квадратного уравнения позволяет определить новые переменные по следующим правилам.

Для *гиперболического* случая (2) даёт два линейно независимых решения: $\xi(x,y)=C$ и $\eta(x,y)=C$. В качестве новых переменных нужно взять ξ и η.

Для *параболического* случая (2) даёт одно решение $\xi(x,y)=C$. В качестве одной новой переменной выбирают ξ, а в качестве другой — произвольную функцию $\eta(x,y)$, линейно независимую от ξ.

Для эллиптического случая (2) даёт два комплексно-сопряжённых решения, которые можно представить в виде $\xi(x,y)\pm i\eta(x,y)=C$. Их общую вещественную часть ξ берут за одну новую переменную, а общую мнимую η — за другую.

Пример решения задачи

Привести к каноническому виду уравнение

$$u_{xx}+2u_{xy}+(1+e^{2x})u_{yy}-u_x+x=0. \tag{3}$$

Составляя уравнение характеристик (2), получаем

$$dy^2-2dx\,dy+(1+e^{2x})dx^2=0.$$

Выделяем в нём полный квадрат и приводим уравнение к виду $(dy-dx)^2=-e^{2x}dx.$

После извлечения квадратного корня из обеих частей

$$dy-dx=\pm i\,e^x dx,$$

и последующее интегрирование даёт два комплексно-сопряжённых решения:

$$(y-x)\pm i\,e^x=C.$$

Принимаем их вещественные и мнимые компоненты за новые переменные, так что $\xi=y-x$ и $\eta=e^x$.

Далее по правилу дифференцирования сложной функции находим первые производные:

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=e^x u_\eta-u_\xi,$$
$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi.$$

Аналогичным образом дифференцируя эти выражения, находим вторые производные:

$$u_{xx}=e^x u_\eta+e^{2x}u_{\eta\eta}-2e^x u_{\xi\eta}+u_{\xi\xi};$$
$$u_{xy}=e^x u_{\xi\eta}-u_{\xi\xi};$$
$$u_{yy}=u_{\xi\xi}.$$

Подставляя все найденные производные в исходное уравнение (3) и приводя подобные слагаемые, получаем его вид в новых переменных:

$$e^{2x}u_{\eta\eta}+e^{2x}u_{\xi\xi}+u_{\xi}+x=0.$$

Замечая, что $x=\ln\eta$ и $e^{2x}=\eta^2$, переходим к новым переменным окончательно:

$$\eta^2(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta})+u_{\xi}+\ln\eta=0.$$

Задачи для решения

Определить тип дифференциальных уравнений в частных производных и привести их к каноническому виду. (Для тех уравнений, которые имеют различные типы в разных частях плоскости $\mathbb{R}^2$, преобразовать каждый тип отдельно.)

1. $u_{xx}-2\sin x u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}-\cos x u_y=0;$
2. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_x-u_y=0;$
3. $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0;$
4. $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+2x^2u_{yy}+yu_y=0;$
5. $y^2u_{xx}+u_{yy}=0;$
6. $u_{xx}+2u_{xy}+(1-\operatorname{sgn} y)u_{yy}=0;$
7. $\sin^2 x u_{xx}-2y\sin x u_{xy}+y^2u_{yy}=0.$

Метод прямой и обратной волн

Уравнение свободных колебаний в простейшем одномерном случае (струна) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ выражает отклонение струны от положения равновесия в точке x в момент времени t, а скорость распространения колебаний по струне выражается константой $a>0$. Это гиперболическое уравнение.

Составляя для (4) уравнение характеристик (2), находим новые переменные $\xi=x-at$ и $\eta=x+at$. В этих переменных (4) принимает вид $u_{\xi\eta}=0$, или, что то же самое,

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$$

Анализируя это равенство, можно обнаружить, что u_η не может зависеть от ξ и, следовательно, решение должно иметь вид $u = f(\xi) + g(\eta)$. Возвращаясь к прежним переменным, его можно записать в виде

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at). \tag{5}$$

Здесь слагаемое $f(x-at)$ называется *прямой волной* (с ростом времени t график функции f смещается вправо), а слагаемое $g(x+at)$ — *обратной волной* (рост времени t вызывает смещение графика функции g влево).

Рассмотрим задачу Коши для бесконечной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

Здесь функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представляют собой начальное отклонение и начальную скорость струны в точке x.

Уравнению задачи удовлетворяет любая функция (5) при условии, что $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы. Найти их конкретный вид можно, подставив (5) в начальные условия.

Эта подстановка приводит к формуле *Даламбера*:

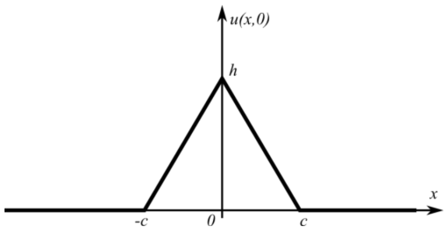
$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz. \tag{6}$$

Задачи для решения

Задача 8. Неограниченной струне, находившейся в состоянии покоя, сообщена на отрезке $|x| \leq c$ поперечная начальная скорость $v = \text{const}$ (вне этого отрезка начальная скорость равна нулю). Найти форму струны в моменты времени $t_k = kc/(4a)$, где $k = 0, 2, 4, 6$.

Задача 9. В начальный момент времени неограниченная струна, находящаяся в состоянии покоя, получает в точке x_0 поперечный удар, сообщающий ей известный импульс. Найти отклонение струны $u(x,t)$ при $t > 0$.

Задача 10. Неограниченной струне придано локальное начальное отклонение, изображённое на рисунке справа. Найти форму струны в моменты времени $t_k = kc/(4a)$ при $k = 0, 1, 2, 3, 5$, если струна была отпущена без начальных скоростей.



Если струна является полуограниченной ($x \geq 0$), то формула Даламбера (6) теряет смысл при $x < at$, т.к. функции φ и ψ определены лишь на положительной полуоси. Однако можно доопределить их на отрицательную полуось:

- если конец струны $x = 0$ закреплён ($u|_{x=0} = 0$), то начальная скорость и начальное отклонение продолжаются *нечётно*:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x); \tag{7}$$

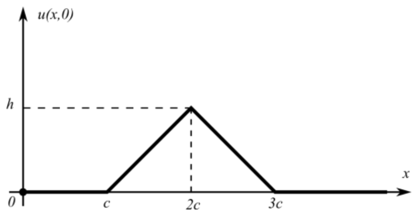
- если конец струны $x = 0$ колеблется свободно ($u_x|_{x=0} = 0$), то начальная скорость и начальное отклонение продолжаются *чётно*:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \psi(-x) = \psi(x). \tag{8}$$

Задача 11. Выписать модификации формулы Даламбера (6) для начальных условий, продолженных в соответствии с (7) и (8).

Задача 12. Полуограниченной струне со свободно колеблющимся концом $x = 0$ сообщена поперечная скорость $v = \text{const}$ на участке $[c, 2c]$. Вне этого участка начальная скорость равна нулю. Начальное отклонение отсутствует. Найти форму струны в моменты времени $t_k = kc / a$ при $k = 0,1,2,4$.

Задача 13. Полуограниченная струна с закреплённым концом $x = 0$ возбуждена локальным начальным отклонением, изображённым на рисунке справа. Найти форму струны в моменты времени $t_k = kc / (2a)$ при $k = 2,3,4,7$.



Пример решения задачи

Найти закон колебаний полуограниченной струны, изначально находившейся в состоянии покоя, если она возбуждается известным во времени отклонением своего конца $x = 0$ (задача о распространении краевого режима).

Математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \mu(t), \quad \mu(0) = 0 \end{gathered}$$

Решением уравнения является любая функция вида (5). В данном случае, однако, физический характер процесса таков, что обратной волны $g(x + at)$ наблюдаться не будет. Это упрощает вид решения:

$$u(x,t) = f(x - at). \tag{9}$$

Подставляя его в начальные и краевые условия, можно найти вид функции f.

Подстановка в начальные условия даёт:

$$u(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0,\ \ x \ge 0;$$
$$u_t(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -af'(x) = 0,\ \ x \ge 0.$$

Таким образом, функция $f(\tau)$ равна нулю при неотрицательном значении аргумента. Далее подставим (9) в краевое условие:

$$u(0,t) = \mu(t) \quad \Rightarrow \quad f(-at) = \mu(t),\ \ t \ge 0.$$

Вводя обозначение $\tau = -at$, последнее равенство можно записать в виде

$$f(\tau) = \mu(-\tau / a),\ \ \tau \le 0.$$

Функция $f(\tau)$ найдена полностью:

$$f(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \ge 0 \\ \mu(-\tau / a), & \tau \le 0 \end{cases}$$

Подставляя её в (9), находим решение задачи:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \ge at \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & x \le at \end{cases}$$

Задача 14. Найти закон колебаний полуограниченной струны, изначально находившейся в состоянии покоя, если она возбуждается известным во времени *изгибом* своего конца $x = 0$.

Метод разделения переменных (метод Фурье)

В методах решения задач математической физики важную роль играет понятие задачи Штурма-Лиувилля

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX(x)}{dx}\right]+\left[\lambda p(x)-q(x)\right]X(x)=0 \\
\alpha_1 X'(0)+\beta_1 X(0)=0 \\
\alpha_2 X'(l)+\beta_2 X(l)=0
\end{gathered}
\tag{10}
$$

и её решений, называемых *собственными функциями* (значения параметра λ, которым соответствуют эти решения, называются *собственными значениями*).

Доказывается, что:

1. Существует *счётное множество* собственных значений λ_n и соответствующих им собственных функций $X_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Собственные функции $X_n(x)$ на отрезке $[0,l]$ образуют ортогональную систему с весом $p(x)$, т.е.
$$(X_n, X_m)=\int_0^l p(x)X_n(x)X_m(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad n\neq m. \tag{11}$$
3. (Теорема Стеклова) Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая краевым условиям задачи (10) и имеющая на отрезке $[0,l]$ непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n X_n(x), \qquad c_n=(f,X_n)/(X_n,X_n)=\int_0^l p(x)f(x)X_n(x)\,dx \Big/ \int_0^l p(x)X_n^2(x)\,dx. \tag{12}$$

Пример решения задачи

Найти колебания струны с закреплёнными концами $x=0$ и $x=l$, возбуждённой начальным отклонением. Начальные скорости равны нулю.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$
\begin{gathered}
u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0\le x\le l, \quad t\ge 0 \\
u(0,t)=u(l,t)=0 \\
u(x,0)=f(x) \\
u_t(x,0)=0
\end{gathered}
\tag{13}
$$

В данном случае неоднородны только начальные условия. Будем искать решение в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$, тогда $u_{tt}=T''X$ и $u_{xx}=X''T$ (для краткости аргументы можно не писать). Подставляя этот вид в уравнение, разделим переменные:

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

Такое равенство возможно только в том случае, если каждая часть (зависящая только от своей переменной) равна константе:

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2.$$

Здесь присутствуют два равенства: $X''+\lambda^2X=0$ и $T''+\lambda^2a^2T=0$. Рассмотрим их в этом порядке.

Из краевых условий и предполагаемого вида решения имеем $X(0)=X(l)=0$. Тогда относительно $X(x)$ получается задача Штурма-Лиувилля:

$$X''+\lambda^2X=0$$
$$X(0)=X(l)=0$$

Решая это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и учитывая краевые условия, находим собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{l},\quad X_n(x)=\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{14}$$

Согласно (10)-(11), они будут ортогональны с весом $p(x)=1$. Подставляя найденные λ_n во второе равенство, находим соответствующие функции $T_n(t)$:

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{a\pi nt}{l}+B_n\sin\frac{a\pi nt}{l}.$$

Записываем общий вид решения в виде ряда по собственным функциям (14):

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\pi nt}{l}+B_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{15}$$

Здесь коэффициенты A_n и B_n подлежат определению из начальных условий задачи.

Начнём с однородного условия для начальной скорости. Продифференцировав (15)

$$u_t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi n}{l}\left(B_n\cos\frac{a\pi nt}{l}-A_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}$$

и подставив сюда $t=0$, получаем

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi n}{l}B_n\sin\frac{\pi nx}{l}=0,$$

откуда $B_n\equiv 0$. Учтя это в (15) и подставив условие для начального отклонения, получаем

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{l}=f(x).$$

Чтобы найти коэффициенты A_n, разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье по синусам (14) согласно (12):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\frac{\pi nx}{l},$$

$$f_n=\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\Big/\int_0^l\sin^2\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Отсюда $A_n=f_n$, и решением задачи является ряд Фурье

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\right]\sin\frac{a\pi nt}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Задачи для решения (гиперболический тип)

Задача 15. Концы струны закреплены жёстко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальные скорости равны нулю.

Задача 16. Струна с жёстко закреплёнными концами возбуждается ударом жёсткого плоского молоточка, сообщающего ей на участке $|x-x_0|\le\delta$ начальную скорость v_0. Найти колебания струны, если начальные отклонения равны нулю.

Задача 17. Найти продольные колебания стержня, левый конец которого закреплён жёстко, а правый свободен, при начальных условиях $u(x,0)=kx$, $u_t(x,0)=0$.

Пример решения задачи

Найти вынужденные колебания струны с жёстко закреплёнными концами под действием внешней силы, если в начальный момент времени эта струна находилась в состоянии покоя.

Математическая модель задачи имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

и в ней неоднородным является только уравнение, описывающее закон развития процесса.

Решение таких задач можно искать в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующей однородной задачи, с неопределёнными временны́ми коэффициентами. Эти собственные функции (14) уже были найдены в предыдущем примере (задача имеет краевые условия того же вида), так что

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{16}$$

Этот ряд удовлетворяет краевым условиям при любых коэффициентах $T_n(t)$.

Чтобы найти их конкретный вид, подставим (16) в неоднородное уравнение задачи, предварительно продифференцировав:

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin\frac{\pi n x}{l},$$
$$u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Подставляя эти производные в (16) и объединяя два ряда в левой части равенства, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin\frac{\pi n x}{l} = f(x,t).$$

Представим правую часть рядом Фурье по собственным функциям (14):

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l},$$
$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin\frac{\pi n x}{l}\, dx.$$

Отсюда видно, что $\varphi_n(t)$ должно быть равно коэффициенту в квадратных скобках.

Подставляя (16) в начальные условия задачи, получаем, что $T_n(0) = T_n'(0) = 0$. Итак, решением является ряд (16), в котором коэффициенты удовлетворяют начальной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$T_n''(t)+\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)=\varphi_n(t), \qquad T_n(0)=T_n'(0)=0.$$

Согласно теореме Коши, эта начальная задача имеет единственное решение. При конкретно заданной правой части $f(x,t)$ оно может быть найдено, например, методом вариации постоянных [6]. (В [1, гл. 2, § 3] приведено интегральное представление такого решения в общем виде.)

Замечания

- Выражение a^2u_{xx} в правой части волнового уравнения (4) в действительности представляет собой дифференциальный оператор
$$\operatorname{div}(a^2 \operatorname{grad} u)=\nabla\cdot(a^2\nabla u).$$
- Если в задаче неоднородны одновременно начальные условия и уравнение, то её можно разбить на сумму двух задач, сохраняя в каждой только одну неоднородность.
- Если в задаче неоднородны краевые условия, то её решение можно искать в виде суммы некоторой функции, удовлетворяющей краевым условиям в любой момент времени, и решения соответствующим образом преобразованной задачи. Последняя будет содержать однородные краевые условия.

Задача 18. Упругий стержень расположен вертикально и своим верхним концом жёстко прикреплён к свободно падающему грузу, который, достигнув скорости $v_0=\mathrm{const}$, мгновенно останавливается. Найти колебания стержня, если его нижний конец свободен.

Задача 19. К струне с жёстко закреплёнными концами с момента времени $t=0$ приложена сила с линейной плотностью $f(x,t)=F_0\sin\omega t$, $F_0=\mathrm{const}$. Найти колебания струны в среде без сопротивления (не рассматривать возможность резонанса).

Задача 20. Оба конца струны закреплены, правый выше левого. За центральную точку струну оттягивают вверх, так что её правая половина принимает горизонтальное положение, и отпускают без начальных скоростей. Найти колебания струны в среде без сопротивления.

Задача 21. Найти собственные функции задачи о колебаниях прямоугольной тонкой мембраны. Какими свойствами они обладают, если мембрана имеет *квадратную* форму?

Идеология метода Фурье практически не меняется для параболических задач, с той лишь разницей, что они имеют первый (а не второй) порядок по времени. Это означает и то, что в параболических задачах присутствует лишь одно начальное условие.

Так, например, уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)+f(\mathbf{r},t),$$

где $u(\mathbf{r},t)$ — температура ($u\ge 0$) в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t; k — коэффициент теплопроводности ($k>0$); $f(\mathbf{r},t)$ — плотность внешних источников тепла. Начальное условие к такому уравнению имеет вид $u(\mathbf{r},0)=\varphi(\mathbf{r})$.

Пример решения задачи

Найти радиальное распределение температуры в однородном тонком диске, если его плоские стороны теплоизолированы, внешний обод поддерживается при нулевой температуре, а радиальное распределение температуры в начальный момент времени известно.

В данном случае целесообразно решать задачу в полярных координатах, причём решение будет зависеть только от r. Пусть радиус диска равен R. Коэффициент теплопроводности постоянен: $k = \mathrm{const}$. С учётом вида оператора Лапласа для полярных координат (см. приложение 1) математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$u_t = k\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right), \quad 0 \le r \le R, \quad t \ge 0$$
$$u(R,t) = 0$$
$$u(r,0) = \varphi(r), \ \varphi(R) = 0$$

Здесь неоднородно только начальное условие. Будем искать решение в виде $u(r,t) = P(r)T(t)$. Подставляя его в уравнение и разделяя переменные как в гиперболическом случае, получаем

$$\frac{T'}{kT} = \frac{P'' + \frac{1}{r}P'}{P} = -\lambda^2.$$

Выпишем оба получившихся уравнения

$$P'' + \frac{1}{r}P' + \lambda^2 P = 0$$
$$T' + \lambda^2 kT = 0$$

и будем рассматривать их в этом порядке.

В уравнении для $P(r)$ выполним замену переменной $z = \lambda r$. Для этого предварительно запишем уравнение более подробно:

$$\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dP}{dr} + \lambda^2 P = 0.$$

Выразим все входящие в него величины через новые переменные:

$$z = \lambda r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{z}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{z};$$
$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dz}\frac{dz}{dr} = \lambda \frac{dP}{dz};$$
$$\frac{d^2P}{dr^2} = \lambda^2 \frac{d^2P}{dz^2}$$

Подставляя в уравнение и сокращая на λ^2, получаем

$$\frac{d^2P}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dP}{dz} + P = 0.$$

Это уравнение Бесселя нулевого порядка [6]. Решением его является

$$P = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r) \tag{17}$$

Из свойств функций Бесселя известно, что $Y_0(0+) \to \infty$, чего не может быть по физическому смыслу задачи. Следовательно, $C_2 = 0$. Константу C_1 можно без ограничения общности положить равной единице, и тогда (17) принимает вид

$$P(r) = J_0(\lambda r).$$

Из краевого условия задачи следует, что $P(R) = 0$. Это означает, что произведение λR должно быть равно одному из нулей функции Бесселя J_0. Обозначая эти нули μ_n ($n \in \mathbb{N}$), можно записать собственные значения и функции задачи:

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}, \qquad P_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

На отрезке $[0, R]$ эти собственные функции ортогональны с весом r, так как уравнение для $P(r)$ в данной задаче можно привести к виду (10) следующим образом:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{dP}{dr}\right) + \lambda^2 r P(r)\right] = 0.$$

Подставляя найденные λ_n в уравнение для $T(t)$, получаем

$$T_n' + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 k T_n = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными; его решением является экспонента

$$T_n(t) = C_n \exp\left(\frac{\mu_n^2 k}{R^2} t \right). \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в предполагаемое решение, записываем его в виде ряда

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{\mu_n^2 k}{R^2} t \right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right). \tag{20}$$

Константы C_n можно определить из начального условия, подставив в (20) $t = 0$ и приравняв результат к $\varphi(r)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right) = \varphi(r).$$

Как видно, C_n представляет собой коэффициент разложения $\varphi(r)$ в ряд Фурье по собственным функциям (18):

$$C_n = \int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr \Big/ \int_0^R r J_0^2\left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr. \tag{21}$$

Формулы (20)-(21) вместе дают решение задачи. Интеграл в знаменателе (21) может быть упрощён с использованием свойств функций Бесселя, так что

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right) dr \right] \exp\left(\frac{\mu_n^2 k}{R^2} t \right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R} \right).$$

Пример решения задачи

Найти закон нагревания однородного тонкого стержня, вся поверхность которого, за исключением левого конца, теплоизолирована. В момент времени $t = 0$ стержень полностью охлаждён до нулевой температуры, затем на его левом конце температуру равномерно повышают.

Математическая модель данной задачи имеет вид

$$\begin{gathered}u_t = k u_{xx}, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0\\ u(0,t) = at\\ u_x(l,t) = 0\\ u(x,0) = 0\end{gathered}$$

(здесь a — это скорость повышения температуры на левом конце).

В этой задаче неоднородны краевые условия, поэтому будем искать решение в виде суммы функции at (удовлетворяющей им в любой момент времени) и некоторой неизвестной пока функции $v(x,t)$:

$$u(x,t) = at + v(x,t). \tag{22}$$

Последовательно подставляя (22) во все выражения, составляющие исходную задачу, можно найти условия, которым удовлетворяет $v(x,t)$. Так, например, из (22) следует, что $u_t = a + v_t$ и $u_{xx} = v_{xx}$. Тогда уравнение $u_t = k u_{xx}$ принимает вид

$$v_t = k v_{xx} - a.$$

Аналогично получаются краевые и начальные условия для $v(x,t)$:

$$\begin{gathered}v(0,t) = 0\\ v_x(l,t) = 0\\ v(x,0) = 0\end{gathered}$$

Теперь неоднородно лишь уравнение. Записывая, как прежде, $u(x,t) = X(x)T(t)$, подставляя это выражение в соответствующее однородное уравнение $v_t = k u_{xx}$ и разделяя в нём переменные, получаем задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{gathered}X'' + \lambda^2 X = 0\\ X(0) = X'(l) = 0\end{gathered}$$

с собственными значениями и функциями

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l}, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi(2n-1)x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Записывая решение в виде ряда по этим функциям

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi(2n-1)x}{2l},$$

подставляем его в *неоднородное* уравнение и объединяем ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}kT_n(t)\right]\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2l}=-a.$$

Функцию $f(x,t)=-a$ нетрудно разложить в ряд Фурье по функциям (23):

$$-a=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4a}{\pi(1-2n)}\right]\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2l}.$$

Приравнивая выражения в квадратных скобках и учитывая начальное условие, из которого вытекает $T_n(0)=0$, получаем для $T_n(t)$ задачу Коши с обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$T_n'(t)+\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}kT_n(t)=\frac{4a}{\pi(1-2n)},\qquad T_n(0)=0.$$

Эта задача может быть решена методом вариации постоянной [6], и решение её есть

$$T_n(t)=\frac{16al^2}{\pi^3(2n-1)^3}\left[\exp\left(\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}kt\right)-1\right].$$

Подставляя всё найденное в (22), записываем решение исходной задачи:

$$u(x,t)=at+\frac{16al^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\left[\exp\left(\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}kt\right)-1\right]\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2l}.$$

Задачи для решения (параболический тип)

Задача 22. Решить задачу о нагревании однородного тонкого стержня, вся поверхность которого, за исключением левого конца, теплоизолирована. Через левый конец внутрь стержня постоянным потоком поступает тепло. В момент времени $t=0$ стержень был полностью охлаждён до нулевой температуры.

Задача 23. Решить задачу об остывании однородного тонкого стержня, равномерно прогретого до некоторой температуры $Q>0$. Левый конец постоянно поддерживается при этой температуре, а на правом происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру $0\le q<Q$. Боковая поверхность стержня теплоизолирована.

Задача 24. При разогревании продуктов в микроволновой печи по всему их объёму происходит выделение тепла. Кроме того, происходит теплообмен с воздухом в камере печи. Сформулировать математическую модель этого процесс. Какие упрощения содержит данная модель по сравнению с реальной ситуацией?

Задача 25. Найти распределение температуры в стержне $0 \le x \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на обоих его концах поддерживается нулевая температура, а начальная температура задана произвольной функцией $f(x)$.

Задача 26. Стержень $0 \le x \le l$ с постоянным поперечным сечением составлен из двух стержней с различными свойствами, состыкованных торцами в точке $x_0 \in (0, l)$. Найти температуру в стержне, если на обоих его концах поддерживается нулевая температура, а начальная температура задана функцией $f(x)$.

Задача 27. Найти температуру в однородном тонком стержне, один конец которого поддерживается при нулевой температуре, а на другом температура равномерно повышается. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, начальная температура всюду равна нулю.

Идеология метода Фурье для эллиптических задач меняется (такие задачи описывают стационарные — т.е. не зависящие от времени — распределения физических величин и не содержат *начальных* условий). В частности, после разделения переменных знак константы λ^2 выбирается так, чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля по тем переменным, по которым однородны *краевые* условия.

Функция, удовлетворяющая в некоторой области Ω *уравнению Лапласа* $\Delta u = 0$, называется *гармонической* в этой области. (Другим распространённым случаем является *уравнение Пуассона* $\Delta u = f$.)

Пример решения задачи

Найти функцию, гармоническую в полукруге, если на его прямой стороне она равна нулю, а вдоль закруглённой стороны меняется синусоидально.

Расчётную область удобно описывать в полярных координатах: $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le r \le R$. Тогда формулировка задачи выглядит следующим образом:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$$
$$u(r,0) = u(r,\pi) = 0$$
$$u(0,\varphi) = 0; \quad u(R,\varphi) = A \sin k\varphi, \ k = \mathrm{const} \in \mathbb{N}$$

Здесь лапласиан (см. приложение 1) для удобства решения раскрыт и всё уравнение умножено на r^2.

Представляя решение в виде $u(r,\varphi) = P(r)F(\varphi)$, сразу же замечаем, что из краевых условий вытекают равенства $F(0) = F(\varphi) = 0$. Это означает, что краевые условия однородны по φ.

Подставляя в уравнение предполагаемый вид решения и разделяя переменные, получаем

$$\frac{r^2 P'' + r P'}{P} = -\frac{F''}{F}.$$

Так как краевые условия однородны по φ, необходимо приравнять обе части к *положительной* константе λ^2:

$$\frac{r^2P''+rP'}{P}=-\frac{F''}{F}=\lambda^2.$$

Выпишем получившиеся равенства

$$F''+\lambda^2F=0$$
$$r^2P''+rP'-\lambda^2P=0$$

и рассмотрим их в этом порядке. Первое из них в сочетании с условиями $F(0)=F(\varphi)=0$ даёт собственные значения и собственные функции задачи:

$$\lambda_n=n,\qquad F_n(\varphi)=\sin n\varphi,\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{24}$$

Подставляя λ_n во второе уравнение, получаем

$$r^2P_n''+rP_n'-n^2P=0.$$

Это однородное уравнение Эйлера [6], общее решение которого имеет вид

$$P_n(r)=B_nr^{-n}+C_nr^n.$$

В нашем случае, однако, $u(0,\varphi)=0$, откуда вытекает $P(0)=0$. Это говорит о том, что $B_n\equiv 0$, и окончательно

$$P_n(r)=C_nr^n. \tag{25}$$

Объединяя (24) и (25), записываем общий вид решения в виде ряда

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nr^n\sin n\varphi.$$

Осталось найти коэффициенты C_n из краевого условия $u(R,\varphi)=A\sin k\varphi$. Подставляя $r=R$ и приравнивая, находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_nR^n\sin n\varphi=A\sin k\varphi.$$

Поскольку $k\in\mathbb{N}$, в данном случае нет необходимости раскладывать правую часть в ряд Фурье по функциям (24): она и так совпадает с k-ой гармоникой ряда. Все остальные коэффициенты C_n (кроме k-ого) должны быть равны нулю:

$$C_k R^k = A;$$
$$C_n \equiv 0, \quad n \neq k.$$

Таким образом, решение задачи имеет очень простой вид:

$$u(r,\varphi) = A\left(\frac{r}{R}\right)^k \sin k\varphi.$$

Замечания

- Для задач, поставленных в полном круге (или кольце) приходится вводить условия периодичности
  $$u\big|_{\varphi=0} \equiv u\big|_{\varphi=2\pi},$$
  рассматриваемые как однородные краевые;
- Если в задаче краевые условия неоднородны по *всем* переменным, то для решения её разбивают на сумму нескольких.

Задачи для решения (эллиптический тип)

Задача 28. Найти функцию, гармоническую в кольце, если на его внутреннем и внешнем ободах задано поведение этой функции.

Задача 29. Найти функции общего вида, которые в декартовых и цилиндрических координатах всегда удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ без краевых условий.

Задача 30. Прямоугольная тонкая пластина размера $a \times b$ имеет две теплоизолированные смежные стороны. Через одну из оставшихся сторон тепло равномерно (т.е. одинаково во всех точках стороны) подводится внутрь, а через другую также равномерно отводится. Источники тепла, действующие по площади пластины, отсутствуют. Определить условия, при которых в пластине будет иметь место стационарное распределение температуры и найти это распределение с точностью до постоянного слагаемого.

Пример решения задачи

Квадратная тонкая пластина имеет две теплоизолированные противоположные стороны. На одной из оставшихся сторон температура постоянна, а на другой меняется линейно. Найти температуру внутри пластины при отсутствии внешних источников тепла.

Математическая модель задачи имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 \le x, y \le l \\
&u_y(x,0) = u_y(x,l) = 0 \\
&u(0,y) = 1 \\
&u(l,y) = y
\end{aligned}
$$

(для упрощения выкладок здесь в качестве постоянной функции взята единица, а в качестве линейной y. Ход решения никак не изменится, если заменить из функциями более общего вида α и $\beta y + \gamma$.)

Представляя решение в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$, замечаем, что краевые условия однородны по y: $Y'(0) = Y'(l) = 0$. Учтём это при разделении переменных в уравнении:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2.$$

Уравнение для Y в сочетании с краевыми условиями даёт задачу Штурма-Лиувилля, решением которой являются собственные значения и функции

$$
\begin{aligned}
&\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad Y_n(y) = \cos\frac{\pi n y}{l}, \qquad n \in \mathbb{N}; \\
&Y_0(y) = 1
\end{aligned}
\tag{26}
$$

(обратите внимание на функцию Y_0 !). Подстановка найденных λ_n даёт для $X_n(x)$ уравнение с постоянными коэффициентами

$$X_n'' - \frac{\pi^2 n^2}{l^2} X = 0,$$

экспоненциальное решение которого удобно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&X_n(x) = A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n x}{l} + B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n x}{l}; \\
&X_0(x) = A_0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Объединяя (26) и (27), записываем решение в виде ряда

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n x}{l} + B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n x}{l}\right]\cos\frac{\pi n y}{l}. \tag{28}$$

Для нахождения коэффициентов разложим краевые условия в ряды Фурье. Единица не нуждается в разложении, так как совпадает с одной из собственных функций Y_0, а для линейной функции y имеем:

$$y=\frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2l}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)\right]\cos\frac{\pi n y}{l}. \tag{29}$$

Выражение в квадратных скобках формулы (28) при $x=0$ должно быть равно нулю, а при $x=l$ — выражению в квадратных скобках формулы (29). Рассматривая соответствующую систему двух линейных уравнений, находим

$$A_n=0; \qquad B_n=\frac{2l}{\pi^2 n^2}\frac{(-1)^n-1}{\operatorname{sh}\pi n}.$$

Для коэффициента A_0 получаются противоречивые условия:

$$A_0\big|_{x=0}=1, \quad A_0\big|_{x=l}=\frac{l}{2}.$$

Чтобы избежать противоречия, будем искать этот коэффициент не в виде константы, а в виде функции $ax+b$, при любых коэффициентах удовлетворяющей уравнению Лапласа и краевым условиям по y. Нетрудно видеть, что в данном случае

$$A_0=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{l}\right)x.$$

Объединяя все найденные фрагменты решения, подставляя их в (28) и учитывая, что при чётных n все коэффициенты B_n обращаются в ноль, окончательно записываем ответ:

$$u(x,y)=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{l}\right)x-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(2k-1)x}{l}}{\operatorname{sh}(2k-1)\pi}\cos\frac{\pi n y}{l}.$$

Задачи для решения (эллиптический тип)

Задача 31. Найти решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

Задача 32. Найти электрическое поле внутри бесконечного цилиндра, имеющего полукруглое сечение. Поверхность цилиндра, соответствующая диаметру полукруга, заряжена до потенциала V_1, а остальная поверхность до потенциала V_2.

Задача 33. Найти электрическое поле внутри области, ограниченной проводящими пластинами $x=0$, $y=0$, $y=b>0$. Пластина $x=0$ заряжена до потенциала V, а пластины $y=0$ и $y=b$ заземлены. Заряды внутри области отсутствуют.

Метод функций Грина для эллиптических задач

Идеология данного метода основана на определённом упрощении исходной задачи. Решение упрощённой задачи, если его удаётся найти, называется функцией Грина, после чего решение исходной задачи выражается через эту функцию известным образом.

Пусть в области Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma$ поставлена задача

$$\begin{aligned} &\Delta u = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega \\ &Lu\big|_{\Gamma} = \varphi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma \end{aligned} \tag{30}$$

с некоторым дифференциальным оператором L, описывающим поведение функции на границе (возможно, составной).

Упростим (30), сделав эту задачу «почти однородной» и введя в неё дополнительный параметр $\mathbf{r}_0 \in \Omega$:

$$\begin{aligned} &\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in \Omega \\ &LG\big|_{\Gamma} = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Решение этой задачи называют функцией Грина для (30), и оно связано с решением исходной задачи следующей формулой:

$$u(\mathbf{r}_0) = \int_{\Gamma} \left(G \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma_{\mathbf{r}} - \int_{\Omega} G \cdot \Delta u \; d\Omega_{\mathbf{r}}. \tag{32}$$

Зная тип оператора L, её нетрудно адаптировать для конкретного типа краевых условий.

Пусть, например, $Lu = u$, т.е. на границе Γ заданы условия Дирихле. Тогда, учитывая равенства $\Delta u = f(\mathbf{r})$, $u\big|_{\Gamma} = \varphi(r)$ и $G\big|_{\Gamma} = 0$, из (32) получаем

$$u(\mathbf{r}_0) = -\int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma_{\mathbf{r}} - \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) \, d\Omega_{\mathbf{r}}. \tag{33}$$

Типы интегралов в (32) и (33) определяются размерностью задачи. Так, если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то первые интегралы будут криволинейными, а вторые — кратными двойными. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то первые интегралы будут поверхностными, а вторые — кратными тройными.

Физически функция Грина выражает влияние источника поля, расположенного в точке $\mathbf{r}$, на точку $\mathbf{r}_0$, поэтому иногда в литературе её называют функцией источника [1]. Эта интерпретация даёт один из способов построения, который в терминах электростатики для трёхмерного случая можно изложить следующим образом.

Разместим в точке $\mathbf{r}$ единичный заряд и найдём потенциал его поля в точке $\mathbf{r}_0$. Он выражается фундаментальным решением уравнения Лапласа (см. приложение 1)

$$\frac{1}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|}$$

и удовлетворяет уравнению $\Delta G = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ из задачи (31) для функции Грина, но не краевому условию. Чтобы удовлетворить краевому условию, компенсируем влияние этого поля на границе, разместив *вне* области Ω заряды противоположного знака. Их суммарный потенциал будет выражаться функцией, гармонической всюду в Ω, и не окажет влияния на уравнение. Тогда функция Грина складывается из двух компонент, первая из которых является полем заряда в точке $\mathbf{r}$, а вторая суммарным полем компенсирующих зарядов.

Точки, в которых при этом необходимо расположить компенсирующие заряды, называются *инверсными* для $\mathbf{r}$ относительно области Ω (или, что то же самое, относительно её границы Γ), а сам этот метод носит название *метода инверсных точек*.

Пример решения задачи

На непроводящей плоскости лежит бесконечная заряженная нить. Найти электрическое поле, создаваемое ей во всех точках плоскости.

Заметим прежде всего, что создаваемое нитью поле будет симметричным относительно её само́й. Поэтому удобно совместить с нитью одну из координатных осей и решать задачу для полуплоскости. Например, можно взять

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{(x,y):\ x\in\mathbb{R},\ y>0\};\\
&\Gamma = \partial\Omega = \{(x,0):\ x\in\mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

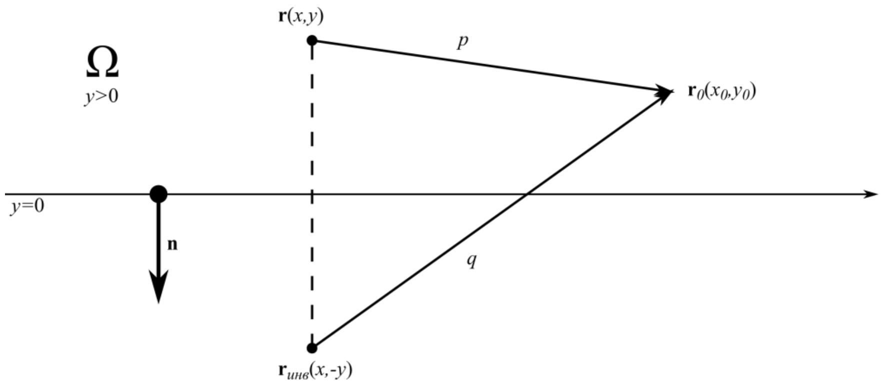
Для данного выбора расчётной области математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=0\\
&u(x,0)=\sigma(x)
\end{aligned} \tag{34}$$

В этом случае функция Грина будет зависеть от четырёх переменных: $G = G(x,y;x_0,y_0)$. Задача для неё, сформулированная согласно идеологии (30)-(31), имеет вид

$$\begin{aligned}
&G_{xx}+G_{yy} = -\delta\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)\\
&G\big|_{y=0}=0
\end{aligned}$$

Область решения с точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ можно изобразить следующим рисунком:



Чтобы компенсировать влияние единичного заряда, расположенного в точке $\mathbf{r}(x, y)$ на прямой $y = 0$, нужно разместить такой же заряд противоположного знака в точке $\mathbf{r}_{инв}(x, -y)$, симметричной относительно этой прямой. Тогда суммарное влияние этих двух зарядов в точке $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$ будет равно (см. в приложении 1 фундаментальное решение уравнения Лапласа для полярных координат)

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{p} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{q}.$$

Его нетрудно выразить через координаты точек, и оно даёт функцию Грина задачи (34):

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}\right]. \qquad (35)$$

Рассмотрим теперь формулу (33) применительно к данной задаче. Второй интеграл в ней равен нулю, так как уравнение (34) однородно. Первый интеграл берётся по всей оси OX, т.е., по x от $-\infty$ до $+\infty$. Присутствующая в нём производная по внешней нормали, как видно из рисунка, может быть найдена простым способом:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial y}.$$

Итак,

$$u(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x) \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} dx. \qquad (36)$$

Дифференцируя (35) по y и подставляя в результат $y = 0$, получаем

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{1}{\pi}\frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2}.$$

Объединяя эту производную на границе с (36), записываем окончательный ответ:

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(x)\,dx}{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

Это несобственный интеграл, зависящий от параметров, который при любой ограниченной функции $\sigma(x)$ сходится.

Задачи для решения (эллиптический тип)

Задача 34. Записать интегральное представление решения задачи 30 через функцию Грина в предположении, что эта функция известна.

Задача 35. Найти электрическое поле, создаваемое в изотропном трёхмерном пространстве заряженной плоскостью. Вне плоскости заряды отсутствуют, а на плоскости распределение заряда известно.

Задача 36. Найти функцию Грина для первой краевой задачи в круге и шаре.

Задача 37. Пользуясь формулой (32), выписать интегральное представление решения *второй* краевой задачи (задачи Неймана) через функцию Грина.

Задача 38. Найти потенциал поля точечного электрического заряда, помещённого над идеально проводящей заземлённой плоскостью и вычислить плотность поверхностных индуцированных зарядов.

Приложение 1. Оператор Лапласа в различных координатах

В задачах математической физики часто возникает оператор $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$. Если коэффициент k постоянен (большинство задач, в которых это не так, не решаются аналитически), то он может быть вынесен за операцию дивергенции, и тогда возникает дифференциальный оператор второго порядка $\Delta u = \nabla^2 u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$, называемый *оператором Лапласа* (лапласианом).

Для различных систем координат лапласиан выглядит следующим образом.

В декартовых координатах (x, y, z):

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z):

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

(Лапласиан для полярных координат (r, φ) получается отбрасыванием последнего слагаемого.)

В сферических координатах (r, φ, θ):

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right).$$

Важную роль в математической физике играют функции

$$u^{\text{полярн}}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} \qquad \text{и} \qquad u^{\text{сферич}}(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{4\pi r},$$

называющиеся *фундаментальными решениями уравнения Лапласа*. В своих системах координат они удовлетворяют уравнению $\Delta u = -\delta(\mathbf{r})$, в котором правая часть является дельта-функцией, равной нулю почти всюду (см. след. приложение). Коэффициенты 2π и 4π являются нормировочными и связаны с полными углами (круговым на плоскости и телесным в трёхмерном пространстве).

Приложение 2. Дельта-функция

Под дельта-функцией (называемой также функцией Дирака) понимают *обобщённую* [2] функцию $\delta(x)$, отвечающую линейному непрерывному функционалу

$$D(f) = f(0).$$

Такой функционал можно записать в виде

$$D(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx,$$

понимая под $\delta(x)$ «функцию», равную нулю всюду, кроме нуля, где она обращается в бесконечность таким образом, что выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

(это свойство следует из того, что функционал D имеет единичную норму). Интегралы могут браться не по всей числовой прямой, а по любому отрезку, содержащему ноль своей внутренней точкой.

Дельта-функция удобна для записи представлений плотности физических величин, сосредоточенных в одной точке. При этом используется следующее её свойство:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0), \qquad x_0 \in (a, b).$$

Хотя она является обобщённой, нетрудно построить последовательность элементарных функций, слабо сходящихся к ней. Дельта-функция также может быть построена для многомерных случаев [1, гл. 3, приложение 6].

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. — М.: «Наука», 2004
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. — М.: Наука, 1989.
3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике*. — М.: Физматлит, 2004.
4. Смирнов М.М. *Задачи по уравнениям математической физики*. — М.: «Наука», 1975.
5. Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. *Методы решения задач математической физики*. — М.: Физматлит, 2002.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Дифференциальные уравнения. Справочник.* — М.: Физматлит, 2001.

Аннотация

Пособие посвящено аналитическим методам решения задач математической физики, сводящихся к дифференциальным уравнениям второго порядка в частных производных. Рассматривается приведение таких уравнений к каноническому виду, а также: метод прямой и обратной волн для гиперболических уравнений; метод разделения переменных для гиперболических, параболических и эллиптических задач; метод функций Грина (функции источника) для эллиптических уравнений. По каждой теме приведены примеры решения задач и предлагаются задачи для самостоятельного решения.