Числовые ряды

М.Ю.Баландин[*]

Октябрь-ноябрь 2004

Аннотация

Рассматриваются вопросы, связанные с решением задач по теме «Числовые ряды и их сходимость» в предположении, что тема изучается сразу после числовых последовательностей в первом семестре курса математического анализа. Приводятся примеры решения задач и схемы доказательств некоторых теоретических результатов.

Предисловие

Эти заметки продолжают обзор [1], посвящённый числовым последовательностям и самым тесным образом с ним связаны. В основу их положен материал практических занятий со студентами-первокурсниками.

Предполагается, что тема изучается сразу после числовых последовательностей, в первом семестре. Такой подход имеет свои достоинства и недостатки: с одной стороны, сходимость рядов естественным образом определяется через сходимость числовых последовательностей; с другой стороны, приходится излагать материал, не опираясь на аппарат пределов функции, дифференциальное исчисление и несобственные интегралы. Полностью пренебрегать этими аспектами, разумеется, нельзя и они всё же включены в текст; соответствующие фрагменты набраны мелким шрифтом — школьных представлений для их понимания вполне достаточно.

В качестве основного источника задач использован сборник Б. Демидовича [3], однако несколько интересных задач позаимствовано из сборника [4]. Для удобства перед их номерами явным образом указывается ссылка, например, **№ [4] 12.75**.

Почти все книги, перечисленные в списке литературы — точнее сказать, все книги, кроме [4] — имеются в электронных версиях. Ещё точнее, некоторые из них имеются *только* в электронных версиях.

Обозначения, используемые в этих заметках, вполне стандартны и относительно них нужно сделать только два замечания.

Во-первых, кое-где нам придётся прибегать к комплексным числам, и для большей наглядности мнимая единица обозначается символом готического шрифта: $\mathfrak{i}^2 = -1$, а не $i^2 = -1$. Это к тому же позволяет оставить букву i для использования, например, в качестве индекса.

Во-вторых, для Σ-нотации сумм мы будем активно пользоваться сокращённой записью, как в [7], по умолчанию предполагая, что индекс суммирования пробегает все натуральные числа $\mathbb{N}$. Если это не так, будем указывать дополнительные ограничения, вроде

$$\sum\nolimits_k a_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad \sum_{k\leqslant 100} a_k \equiv \sum_{k=1}^{100} a_k, \qquad \sum_{k\geqslant 3} a_k \equiv \sum_{k=3}^{\infty} a_k \quad \text{и т.п.}$$

Подобная нотация несколько сокращает высоту и без того громоздких формул с суммами.

---

[*] Кафедра прикладной математики НГТУ.

1. Полезные формулы

При исследовании сходимости рядов очень часто приходится пользоваться формулой суммы геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \frac{a - aq^{n+1}}{1-q} = \frac{aq^{n+1} - a}{q-1}\,, \tag{1}$$

которая справедлива при *любых* значениях a и q, в том числе комплексных. Справедливость эта следует из чисто алгебраического вывода:

$$1+q+\ldots+q^n = \frac{(1-q)(1+q+\ldots+q^n)}{1-q} = \frac{1+q+\ldots+q^n - q - q^2 - \ldots - -q^n - q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Если, сверх того, $|q| < 1$, то в формуле (1) при $n \to \infty$ существует предел правой, а следовательно, и левой части (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

В некоторых случаях, когда знаменатель прогрессии имеет вид $q = \frac{1}{p}$, где $p \in \mathbb{N}$, оказывается удобнее интерпретировать сумму прогрессии, как число в p-ичной системе счисления, например

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = (\text{bin})1.\underbrace{11\ldots1}_{n} = 2 - \frac{1}{2^n}\,. \tag{2}$$

Напомним также формулу Эйлера, выведенную в [1] § 11:

$$\mathcal{H}_n = \sum_{k\leqslant n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \gamma + \ln n + \varepsilon_n, \qquad \gamma \approx 0.5772,\ \varepsilon_n \to 0. \tag{3}$$

Здесь мы ввели специальное обозначение $\mathcal{H}_n$ для суммы первых n чисел, обратных натуральным.

С именем Леонарда Эйлера связаны и следующие две формулы этого параграфа. Во-первых, это *замечательный предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \tag{4}$$

рассмотренный в [1] § 6. Во-вторых, это формула мнимой экспоненты

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi, \tag{5}$$

которая, несмотря на свою комплексную природу, часто помогает упрощать чисто вещественные выражения.

Сейчас мы выведем из (5) и (1) два важных соотношения, на которые будем ссылаться в дальнейшем. Рассмотрим две тригонометрические суммы

$$\sum_{k\leqslant n} \sin k\varphi \quad \text{и} \quad \sum_{k\leqslant n} \cos k\varphi. \tag{6}$$

Заметим, что согласно (5), $\cos k\varphi = \operatorname{Re} e^{\mathrm{i}k\varphi}$ и $\sin k\varphi = \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}k\varphi}$. Тогда, с учётом формул $\operatorname{Re}(a+b) = \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b$ и $\operatorname{Im}(a+b) = \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b$, имеем

$$\sum_{k\leqslant n} \sin k\varphi = \operatorname{Im} \sum_{k\leqslant n} e^{\mathrm{i}k\varphi}; \quad \sum_{k\leqslant n} \cos k\varphi = \operatorname{Re} \sum_{k\leqslant n} e^{\mathrm{i}k\varphi}.$$

Итак, обе эти тригонометрические суммы являются вещественной и мнимой частями некоторой суммы мнимых экспонент. Поскольку $e^{\mathrm{i}k\varphi} = (e^{\mathrm{i}\varphi})^k$, эта сумма образует геометрическую прогрессию

$$\sum_{k\leqslant n}(e^{\mathrm{i}\varphi})^k$$

с первым членом $e^{\mathrm{i}\varphi}$ и таким же знаменателем. Её сумма легко находится по формуле (1):

$$\sum_{k\leqslant n}(e^{\mathrm{i}\varphi})^k = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}(e^{\mathrm{i}n\varphi}-1)}{e^{\mathrm{i}\varphi}-1} = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\frac{n\varphi}{2}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{n\varphi}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{n\varphi}{2}}\right)}{e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\right)} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{n\varphi}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{n\varphi}{2}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}}e^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\varphi}{2}}.$$

Далее, из чётности/нёчетности тригонометрических функций и формулы (5) получаем, что

$$e^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{7}$$

Вычитая (7) из (5), обнаруживаем, что

$$e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi} = 2\mathrm{i}\sin\varphi.$$

Тогда окончательно

$$\sum_{k\leqslant n}(e^{\mathrm{i}\varphi})^k = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}e^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\tfrac{(n+1)\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\tfrac{(n+1)\varphi}{2}\right).$$

Взяв мнимую и вещественную части этого соотношения, получаем искомые формулы[1]

$$\sum_{k\leqslant n}\sin k\varphi = \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\ \sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}};\quad \sum_{k\leqslant n}\cos k\varphi = \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\ \cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}, \tag{8}$$

которые справедливы при $\varphi \neq 2\pi n$. Если же $\varphi = 2\pi n$, то $\sin 2k\pi n = 0$ и $\cos 2k\pi n = 1$, так что суммы (6) легко вычисляются непосредственно.

Подобным же образом могут упрощаться и другие схожие тригонометрические суммы. В качестве упражнения рекомендуется самостоятельного найти

$$\sum_{k\leqslant n}(-1)^{k+1}\sin(2k-1)\varphi = \sin\varphi - \sin 3\varphi + \ldots + (-1)^{n+1}\sin(2n-1)\varphi.$$

Наконец, в заключение данного параграфа упомянем отношение эквивалентности

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, \tag{9}$$

которое было подробно выведено в [1] § 12. Вообще, как мы увидим ниже, соотношения эквивалентности и их обобщения часто оказываются очень полезными при исследовании рядов.

---

[1] Их вывод в принципе возможен и без привлечения комплексных чисел. Пример можно посмотреть в [4] гл. 12, § 1, п. 3.

2. Сходимость рядов по определению

Понятие числового ряда как формально записанной суммы бесконечного числа слагаемых, образующих некоторую последовательность

$$\sum\nolimits_k a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

не даёт представления о способе вычисления подобных сумм: процесс суммирования никогда не закончится (более того, как мы увидим ниже в § 7, здесь даже не выполняются знакомые со школы свойства коммутативности и ассоциативности).

Определение сходимости и суммы ряда через сходимость последовательности его частичных сумм[2] даёт не только способ вычисления, но и достаточно богатый аппарат для исследования сходимости *без нахождения суммы ряда.*

Пусть дан числовой ряд

$$\sum\nolimits_k a_k. \tag{10}$$

Для обозначения его частичных сумм условимся использовать символ $\mathcal{S}_n(a_k)$, причём иногда будем опускать указание суммируемой последовательности, если не возникает двусмысленности:

$$\mathcal{S}_n(a_k) = \mathcal{S}_n = \sum_{k \leqslant n} a_k.$$

Тогда, если последовательность частичных сумм имеет конечный предел $\mathcal{S}_n \to S$, говорят, что ряд (10) *сходится* к S. В противном случае говорят, что ряд *расходится.* Для расходящегося ряда возможны две ситуации: либо $\mathcal{S}_n \to \infty$ (будем тогда говорить, что ряд *расходится к бесконечности*), либо предела вовсе не существует (ряд расходится *вообще*).

Для записи того факта, что ряд сходится к числу S, будем пользоваться обозначением

$$\sum\nolimits_k a_k = S < \infty,$$

а для расходимости к бесконечности — обозначением

$$\sum\nolimits_k a_k \to \infty.$$

Наконец, ограниченность частичных сумм (хотя бы их последовательность и не имела предела) будем обозначать

$$\left|\sum\nolimits_k a_k\right| < \infty.$$

Во избежание недоразумений поясним лишний раз это соотношение. Оно означает, что

$$\exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant C.$$

Говорят ещё, что частичные суммы ряда *ограничены в совокупности.*

Рассмотрим теперь, что̀ даёт определение сходимости ряда. Во-первых, поскольку дело сводится к сходимости числовой последовательности, остаётся в силе критерий Коши: ряд

---

[2] В некоторых книгах авторы употребляют термин «*частные* суммы».

сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм фундаментальна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N}: \quad |\mathcal{S}_{n+p} - \mathcal{S}_n| = \Bigl|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\Bigr| < \varepsilon. \tag{11}$$

Во-вторых, если $\mathcal{S}_n \to S$, то и $\mathcal{S}_{n-1} \to S$. Тогда последовательность $(\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n-1})$ является бесконечно малой, а $\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_{n-1} \equiv a_n$. Это приводит к необходимому условию сходимости: *числовой ряд* $\sum_k a_k$ *может сходиться*[3] *лишь тогда, когда его общий член стремится к нулю, т.е.* $a_k \to 0$.

В-третьих, если $a_k \geqslant 0$ (хотя бы начиная с некоторого номера), то последовательность его частичных сумм $\mathcal{S}_n$ монотонно возрастает и для её сходимости к конечному числу (т.е., сходимости ряда) вполне достаточно ограниченности сверху.

В-четвёртых, можно вспомнить, что всякая сходящаяся последовательность ограничена (см. решение задачи **№ 93** в [1] § 2). Тогда, если $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ и ряд $\sum_k b_k$ сходится, ограничена его последовательность частичных сумм: $\mathcal{S}_n(b_k) \leqslant C$. Но эта же величина C ограничивает сверху и частичные суммы $\mathcal{S}_n(a_k)$, так что сходится и ряд $\sum_k a_k$. И наоборот, если ряд $\sum_k a_k$ расходится[4], то его частичные суммы $\mathcal{S}_n(a_k)$ неограниченно возрастают и тем более неограниченно возрастают частичные суммы $\mathcal{S}_n(b_k)$, т.е., ряд $\sum_k b_k$ тоже расходится. Тем самым мы только что доказали признак сравнения для знакоположительных рядов:

> *Если* $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$, *то из сходимости ряда* $\sum_k b_k$ *следует сходимость ряда* $\sum_k a_k$,
> *а из расходимости ряда* $\sum_k a_k$ *— расходимость ряда* $\sum_k b_k$.

Необходимо отметить, что условие неотрицательности членов ряда в этом признаке очень важно и простое соотношение $a_k \leqslant b_k$ ещё не позволяет делать выводы о сходимости или расходимости.

В-пятых, если удаётся упростить выражение для частичной суммы и найти предел полученного выражения (или установить отсутствие сходимости), то это будет не только доказательством сходимости (расходимости) ряда, но и сразу выявит его сумму. Методы подобных упрощений замечательно описаны в [7] и кое-что из них рассмотрено в [1] § 1.

Наконец, в-шестых, из ряда можно удалить — или добавить, или заменить в нём — *конечное* число членов, и характер сходимости ряда при этом никак не изменится. Иными словами, сходящийся ряд останется сходящимся, расходящийся — расходящимся. Однако *сумма* сходящегося ряда при этом может измениться. (Данный факт вытекает из того, что названные действия увеличат или уменьшат все члены последовательности частичных сумм, начиная с некоторого номера, на одно и то же число.) Аналогично, ряды можно умножать и делить на ненулевые константы без изменения характера сходимости.

Рассмотрим теперь задачи на практическое применение вышеперечисленных результатов, с учётом всего того, что было решено, выведено и доказано в [1].

Наименее интересными являются задачи, в которых ряд расходится по нарушению необходимого условия сходимости. Доказать, что общий член ряда не стремится к нулю, как правило, довольно легко, так что мы ограничимся лишь списком номеров, к которым относится данная подсказка: **№ 2553**, **№ 2556**, **№ 2557**, **№ 2588**, **№ 2673**, **№ 2691**.

Ничуть не более интересны задачи **№ 2546** и **№ 2547**. В них сходимость и суммы рядов тривиально устанавливаются на основании формулы (1): эти ряды образованы суммированием геометрических прогрессий.

---

[3] Может сходиться, но вовсе не обязательно сходится. Зато если $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, то ряд гарантированно расходится.

[4] Очевидно, что ряд с неотрицательными членами может расходиться только к бесконечности.

Критерием Коши мы уже пользовались в [1] § 5, где в процессе решения задач **№ 88** (она же **№ 2576**) и **№ 84** была de-facto исследована сходимость рядов

$$\sum\nolimits_k \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_k \frac{\cos k!}{k(k+1)}.$$

Как тогда выяснилось, первый из них расходится к бесконечности, а второй сходится (хотя сумма его осталась неизвестной).

Признаком сравнения мы будем активно пользоваться чуть ниже в § 4, где запишем ещё одну его важную разновидность.

Гораздо интереснее для нас те задачи, в которых частичная сумма ряда может быть свёрнута в краткую форму, допускающую нахождение предела (одновременно являющегося и суммой ряда). Они тем интереснее, чем более нетривиальных выкладок требует преобразование частичной суммы. Решим несколько подобных задач.

Нам уже знак*о*м принцип телескопических сумм из [1] § 1; посмотрим, как он работает в **№ 2552**. В задаче просят исследовать сходимость ряда

$$\sum\nolimits_k \Big(\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\Big).$$

Выпишем первые несколько частичных сумм:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &= \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1\,; \\
\mathcal{S}_2 &= \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} &&= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3}\,; \\
\mathcal{S}_3 &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3} &&= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4}\,; \\
\mathcal{S}_4 &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{4} &&= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{5}\,.
\end{aligned}$$

Видно, что во всех частичных суммах, начиная уже со второй, остаются лишь первые два и последние два слагаемых, а остальные сокращаются:

$$\mathcal{S}_n = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\,.$$

Найти предел этого выражения не составляет труда:

$$\mathcal{S}_n = 1 - \sqrt{2} + \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}\,,$$

так что ряд сходится к числу $1 - \sqrt{2} \approx -0.41$.

Аналогичным образом, с использованием принципа телескопических сумм, решаются задачи **№ 2549** и **№ 2550**, первая из которых фактически уже решена в [1] § 1.

Далее, вспоминая вывод формул (8) на основании формулы Эйлера (5), решим тем же методом по горячим следам задачу **№ 2551**. Два ряда этой задачи

$$\sum\nolimits_k q^k \sin k\varphi \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_k q^k \cos k\varphi \tag{12}$$

на самом деле представляют собой две половинки одного целого, так как, согласно (5),

$$(qe^{\mathrm{i}\varphi})^k = q^k e^{\mathrm{i}k\varphi} = q^k \cos k\varphi + \mathrm{i}\, q^k \sin k\varphi.$$

Таким образом, если мы найдём сумму комплексного ряда

$$\sum\nolimits_k (qe^{\mathrm{i}\varphi})^k, \qquad |q| < 1, \tag{13}$$

то её мнимая часть будет равна сумме первого из рядов (12), а вещественная часть — сумме второго.

Заметим, что ряд (12) образует сумму геометрической прогрессии со знаменателем $qe^{\mathrm{i}\varphi}$, для которого

$$|qe^{\mathrm{i}\varphi}| = \sqrt{q^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi} = |q| < 1,$$

так что эта сумма, согласно (1), будет выражаться конечным числом — т.е., ряд (13) сходится.

Применяя формулу (1) и устремляя $n \to \infty$, получаем его сумму:

$$\sum\nolimits_k (qe^{\mathrm{i}\varphi})^k = \frac{qe^{\mathrm{i}\varphi}}{1 - qe^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{q\cos\varphi + \mathrm{i}\, q\sin\varphi}{(1 - q\cos\varphi) - \mathrm{i}\, q\sin\varphi}\,.$$

Деление комплексных чисел, как известно, выполняется по правилу

$$\frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} = \frac{(a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d)}{(c + \mathrm{i}d)(c - \mathrm{i}d)} = \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2}\,,$$

так что

$$\sum\nolimits_k (qe^{\mathrm{i}\varphi})^k = \frac{[q\cos\varphi(1 - q\cos\varphi) - q^2\sin^2\varphi)] + \mathrm{i}[q\sin\varphi(1 - q\cos\varphi) + q^2\sin\varphi\cos\varphi]}{(1 - q\cos\varphi)^2 + q^2\sin^2\varphi} =$$
$$= \frac{(q\cos\varphi - q^2) + \mathrm{i}\, q\sin\varphi}{1 - 2q\cos\varphi + q^2}\,.$$

Выделяя отсюда мнимую и вещественную части, получаем ответ:

$$\sum\nolimits_k q^k \sin k\varphi = \frac{q\sin\varphi}{1 - 2q\cos\varphi + q^2}\,, \qquad \sum\nolimits_k q^k \cos k\varphi = \frac{q\cos\varphi - q^2}{1 - 2q\cos\varphi + q^2}\,.$$

Теперь рассмотрим задачу **№ 2548**, где нужно найти сумму ряда

$$\sum\nolimits_k \frac{2k - 1}{2^k}\,.$$

Здесь решение находится неочевидным способом: нужно рассмотреть разность $\mathcal{S}_n - \frac{1}{2}\mathcal{S}_n$, сгруппировав слагаемые со сдвигом:

$\mathcal{S}_n =$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{3}{4}$	$+$	$\frac{5}{8}$	$+$	$\ldots$	$+$	$\frac{2n-3}{2^{n-1}}$	$+$	$\frac{2n-1}{2^n}$		
$\frac{1}{2}\mathcal{S}_n =$			$\frac{1}{4}$	$+$	$\frac{3}{8}$	$+$	$\ldots$	$+$	$\frac{2n-5}{2^{n-1}}$	$+$	$\frac{2n-3}{2^n}$	$+$	$\frac{2n-1}{2^{n+1}}$
$\mathcal{S}_n - \frac{1}{2}\mathcal{S}_n =$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{2}{4}$	$+$	$\frac{2}{8}$	$+$	$\ldots$	$+$	$\frac{2}{2^{n-1}}$	$+$	$\frac{2}{2^n}$	$-$	$\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

Отсюда, учитывая что $\mathcal{S}_n - \frac{1}{2}\mathcal{S}_n = \frac{1}{2}\mathcal{S}_n$, получаем

$$\frac{\mathcal{S}_n}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n - 1}{2^{n+1}}\,.$$

Выражение в скобках представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{2}$ и таким же знаменателем. Применяя формулу (1) и удваивая результат, получаем

$$\mathcal{S}_n = 3 - \frac{2n + 3}{2^n}\,.$$

С использованием теоремы Штольца (см. [1] § 7) нетрудно убедиться, что $\mathcal{S}_n \to 3$ при $n \to \infty$, так что сумма ряда равна трём.

К задаче **№ 2548** очень близок ряд

$$\sum\nolimits_k \frac{k}{2^k}\,, \tag{14}$$

который, однако, мы просуммируем совершенно другим способом. В его частичной сумме каждое слагаемое может быть представлено в виде

$$\frac{k}{2^k} = \underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{k}\,.$$

Тогда можно заметить, что в выражении

$$\mathcal{S}_n = \left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{3} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)}_{n}$$

слагаемые легко перегруппировываются в геометрические прогрессии. Для этого нужно объединить все первые слагаемые из скобок, затем все вторые и т.д.:

$$\mathcal{S}_n = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)}_{n} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)}_{n-1} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right)}_{2} + \frac{1}{2^n}\,.$$

Здесь каждую из скобок можно преобразовать согласно (2), рассматривая их как двоичные числа:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right), \\ &\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Тогда для частичной суммы получаем выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\left(2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^n}\,(2 - 1) = \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}\,, \end{aligned}$$

откуда легко находим, что $\mathcal{S}_n \to 2$ при $n \to \infty$.

Заметим ещё, что имеет место равенство

$$\frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{2k-1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right).$$

Формально суммируя по $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sum\nolimits_k \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\sum\nolimits_k \frac{2k-1}{2^k} + \sum\nolimits_k \frac{1}{2^k}\right). \tag{15}$$

Оба ряда в правой части сходятся (сходимость первого доказана в **№ 2548**, а второй образован суммированием геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$), поэтому сходится и ряд в левой части: последовательность его частичных сумм есть сумма двух сходящихся последовательностей. Соотношение (15) даёт для ряда (14) тот же результат: он сходится к двойке.

3. Эйлер, Дирихле, Риман и дзета-функция

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о сходимости и расходимости очень важного ряда

$$\sum\nolimits_k \frac{1}{k^s} = \sum\nolimits_k d_k, \quad d_k = k^{-s}, \tag{16}$$

известного как *ряд Дирихле.*

Нам уже известно, что при $s = 1$ ряд Дирихле расходится к бесконечности: в [1] это было доказано на основании критерия Коши и затем выведена формула (3), показывающая логарифмическую скорость расходимости.

Заметим теперь, что $d_k > 0$ и значит, на основании признака сравнения из § 2, ряд (16) расходится к бесконечности при $s < 1$. При $s \leqslant 0$ его расходимость совершенно тривиальна: тогда общий член не стремится к нулю и очень легко показать, что

$$\forall s \leqslant 0: \quad \mathcal{S}_n(d_k) \geqslant n. \tag{17}$$

Оценим скорость расходимости при $0 < s < 1$. Это можно сделать следующим образом:

$$\forall s \in (0;1): \quad \mathcal{S}_n(d_k) = \underbrace{1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s}}_{n} > n \cdot \frac{1}{n^s} = n^{1-s}. \tag{18}$$

Здесь мы ограничили сумму снизу, взяв из всех слагаемых наименьшее и умножив его на число слагаемых.

Итак, *ряд Дирихле* (16) *расходится к бесконечности при* $s \leqslant 1$ *с оценками* (3)*,* (17)*,* (18)*.* При $s = 1$ он ещё называется *гармоническим рядом*[5].

Исследуем теперь сходимость (16) при $s > 1$. Для этого отметим, что при неотрицательности d_k суммы $\mathcal{S}_n(d_k)$ монотонно возрастают и достаточно показать их ограниченность.

Запишем предварительно следующее неравенство:

$$\underbrace{\frac{1}{(k+1)^s} + \frac{1}{(k+2)^s} + \ldots + \frac{1}{(2k)^s}}_{k} < k \cdot \frac{1}{k^s} = \frac{1}{k^{s-1}}\,. \tag{19}$$

Здесь мы воспользовались тем, что каждое из слагаемых меньше k^{-s} и умножили эту величину на число слагаемых k. Для удобства введём обозначение $s - 1 = \sigma > 0$.

Рассмотрим теперь ряд (16) в соответствии с (19):

$$\sum\nolimits_k d_k = 1 + \frac{1}{2^s} + \underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{5^s} + \ldots + \frac{1}{8^s}}_{4=2^2} + \underbrace{\frac{1}{9^s} + \ldots + \frac{1}{16^s}}_{8=2^3} + \ldots$$

Здесь группы слагаемых, охваченные фигурными скобками, не превосходят $2^{-\sigma}$, $4^{-\sigma}$, $8^{-\sigma}$ и т.д., так что

$$\sum\nolimits_k d_k \leqslant 1 + \frac{1}{2^s} + 2^{-\sigma} + (2^{-\sigma})^2 + (2^{-\sigma})^3 + \ldots$$

---

[5] Студенты часто спрашивают, какая-такая гармония может заключаться в расходящемся ряде. Мне удалось найти два объяснения этому исторически сложившемуся названию. В [7] нашлось рассуждение о связи коэффициентов ряда с гармониками скрипичных струн, в [5] — упоминание о том, что каждый член ряда есть среднее гармоническое двух соседних членов: $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}})$ при $n \geqslant 2$.

Все слагаемые, кроме первых двух, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $2^{-\sigma}$, сумма которой (т. к. $|2^{-\sigma}| < 1$) является сходящимся рядом. Таким образом, по признаку сравнения ряд Дирихле сходится при $s > 1$ и для его суммы справедлива оценка

$$\forall s > 1: \quad \sum\nolimits_k \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + 2^{-s} + \frac{2^{1-s}}{1 - 2^{1-s}}, \tag{20}$$

которое получается из последнего неравенства и формулы (1).

Окончательно подытожим всё вышесказанное:

> *Ряд Дирихле* (16) *расходится к бесконечности при* $s \leqslant 1$ *с оценками расходимости* (17)*,* (18)*,* (3) *и сходится при* $s > 1$ *с оценкой* (20) *для суммы.*

Рассматривая сумму ряда, как функцию от s, определённую при $s > 1$, будем обозначать эту функцию $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Первые исследования ζ-функции предпринял Л. Эйлер. Установив формулу (3) и как следствие, неограниченность $\zeta(1)$, он затем показал, что $\zeta(2n) = q_n \pi^{2n}$, где q_n — некоторый рациональный коэффициент. В [2] т. 1, гл. X, § 167 им указан способ нахождения таких коэффициентов и там же в § 168 приведены их значения для $n = 1, 2, \dots 13$ (например, $\zeta(2) = \pi^2/6$). Случай $s = 2n + 1$ оказался значительно более сложным — так, лишь в 1978 году было показано, что $\zeta(3)$ является иррациональным числом.

Но самым замечательным результатом Эйлера, касающимся ζ-функции, было её разложение в произведение (см. [5] т. 2, гл. XI, § 6, п. 402)

$$\zeta(s) = \prod\nolimits_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{21}$$

где p пробегает все значения *простых* чисел. Из (21) и того факта, что $\zeta(1) = \infty$, следует доказательство *бесконечности множества простых чисел* (ведь если бы их было конечное число, произведение (21) содержало бы лишь конечное количество множителей и при $s = 1$ само было бы конечным).

Впоследствии важная роль ζ-функции в теории чисел подтвердилась работами П. Чебышёва и П. Дирихле, но особенно значительные результаты здесь получил Б. Риман, который обобщил функцию на случай комплексного аргумента. В его честь ζ-функцию сейчас называют *функцией Римана.*

В дальнейших выкладках мы будем часто пользоваться фактом сходимости или расходимости ряда Дирихле в зависимости от s, прибегая к нему, как к эталону в признаках сравнения.

4. Знакопостоянные ряды

Знакопостоянные ряды, как уже отмечалось, придают последовательностям частичных сумм монотонность, несколько упрощающую исследование сходимости. С другой стороны, рассмотрение таких рядов оказывается особенно важным из-за вопросов абсолютной сходимости, к которым мы ещё вернёмся.

Нам достаточно будет ограничиться рядами с *положительными* членами: если все члены ряда отрицательны, то знак минуса можно вынести за сумму и исследовать получившийся знакоположительный ряд.

В § 1 мы уже сформулировали признак сравнения для знакопостоянных рядов, с помощью которого можно устанавливать как сходимость, так и расходимость. У него существует ещё одна разновидность, однако чтобы сформулировать её, нам понадобятся некоторые определения.

Ещё в [1] мы ввели для последовательностей отношение эквивалентности, говоря, что $a_n \sim b_n$, если $\frac{a_n}{b_n} \to 1$. Будем также говорить, что если отношение $\frac{a_n}{b_n}$ имеет при $n \to \infty$ некоторый *конечный ненулевой* предел, то последовательности a_n и b_n *сопоставимы.* Для сопоставимых последовательностей будем пользоваться обозначением $a_n \not\sim b_n$. Если же упомянутое отношение стремится к нулю, то будем говорить, что последовательность a_n *пренебрежимо мала* по сравнению с b_n и обозначим этот факт $a_n \ll b_n$. Обратно, если $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$, то $a_n \gg b_n$.

Теперь мы можем сформулировать предельный признак сравнения для знакоположительных рядов:

> *Если $a_k \geqslant 0$ и $b_k \geqslant 0$, то при $a_k \not\sim b_k$ ряды $\sum_k a_k$ и $\sum_k b_k$ сходятся или расходятся одновременно. Если же $a_k \ll b_k$, то из сходимости ряда $\sum_k b_k$ следует сходимость ряда $\sum_k a_k$, а из расходимости ряда $\sum_k a_k$ — расходимость ряда $\sum_k b_k$.*

Интересным примером на использование признака сравнения является **№ 2621**, в которой *общий член ряда невозможно записать аналитически.* Просят исследовать сходимость ряда

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}, \tag{22}$$

где λ_k — последовательные положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

Это уравнение является трансцендентным и его корни не выражаются явным образом. Однако, если обратиться к графическому способу решения уравнений, то становится видно, что корней счётное множество: прямая $f(x) = x$ пересекает каждую из ветвей тангенсоиды $f(x) = \operatorname{tg} x$ (рис. 1).

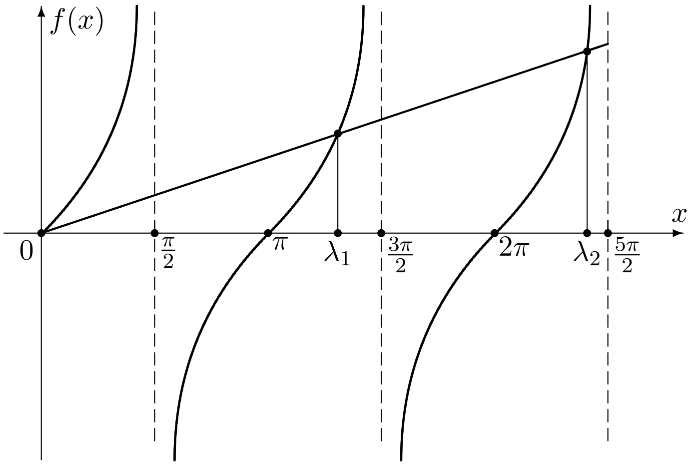


Рис. 1: к задаче № 2621.

Из рисунка можно видеть и оценку интервала для k-го корня:

$$\pi k < \lambda_k < \pi(k + \tfrac{1}{2}),$$

откуда получаем важное для нас неравенство

$$0 < \frac{1}{\lambda_k^2} < \frac{1}{\pi^2 k^2} \,.$$

Вспоминая о сходимости ряда Дирихле при $s > 1$, заключаем отсюда по признаку сравнения, что ряд (22) сходится.

Здесь мы пользовались непредельной формой признака. Если же обратиться к его предельной форме, то можно заметить, что буквально в одну строчку решается задача **№ 2656**. Действительно, если взять арифметическую прогрессию $a + kb$, $k \in \mathbb{N}$ и $b \neq 0$, то последовательность обратных величин оказывается сопоставимой с членами гармонического ряда:

$$\frac{1}{a + kb} \varpropto \frac{1}{k}\,,$$

который, как мы уже знаем, расходится.

Рассмотрим ещё несколько задач на признаки сравнения. Интересную пару образуют **№ [4] 12.75** и **№ [4] 12.69**, где просят исследовать сходимость рядов

$$\sum\nolimits_k \ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_k \ln\Big(1 + \frac{1}{k^2}\Big) \tag{23}$$

соответственно. В принципе, первый из них можно исследовать и по определению:

$$\ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) = \ln\Big(\frac{k+1}{k}\Big) = \ln(k+1) - \ln k,$$

так что для частичных сумм справедливо

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \ln(1 + \tfrac{1}{1}) + \ln(1 + \tfrac{1}{2}) + \ldots + \ln(1 + \tfrac{1}{n}) = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) \end{aligned}$$

и видно, что ряд расходится к бесконечности.

С другой стороны, можно воспользоваться отношением эквивалентности

$$\ln\Big(1 + \frac{1}{k}\Big) \sim \frac{1}{k}\,, \tag{24}$$

полученным в [1] § 6 и вспомнить, что гармонический ряд расходится. Тогда по предельному признаку сравнения расходится и первый из рядов (23).

Выражение (24) означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{1}{k}\right)} = 1,$$

и если учесть, что у сходящейся последовательности все подпоследовательности[6] сходятся к тому же пределу, то можно записать

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}{\left(\frac{1}{k^2}\right)} = 1.$$

Это, в свою очередь, означает, что $\ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2}$ и значит, второй из рядов (23) сходится, как сходится ряд Дирихле при $s = 2$.

---

[6] Последовательность квадратов натуральных чисел $1, 4, 9, 16\ldots$ является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, 4, \ldots$

В задаче **№ 2612** нужно исследовать сходимость ряда

$$\sum\nolimits_k \Big(e - (1+\tfrac{1}{k})^k\Big)^p.$$

Здесь будет уместно вспомнить, что на основании результатов [1] § 6 имеет место неравенство

$$0 < \Big(e - (1+\tfrac{1}{k})^k\Big)^p < \frac{4^p}{k^p}\,, \qquad p = \mathrm{const},$$

и значит, ряд будет сходиться при $p > 1$.

В задаче **№ 2626** работает предельный признак сравнения:

$$\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha} = \frac{(\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2})(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-2})}{k^\alpha(\sqrt{k+2}+\sqrt{k-2})} = \frac{4}{k^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{k}}+\sqrt{1-\frac{2}{k}}\right)}\,.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^\alpha} \propto \frac{1}{k^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,,$$

так что ряд сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$ и расходится при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Весьма нетривиальными задачами являются **№ 2617** и **№ 2618**. Обе они решаются на основании свойств логарифмов — а именно, соотношения

$$x^y = e^{\ln(x^y)} = e^{y\ln x}.$$

В задаче **№ 2617** положим $x = \ln\ln k$ и $y = \ln k$, тогда

$$(\ln\ln k)^{\ln k} = e^{\ln k\cdot\ln\ln\ln k} = \left(e^{\ln k}\right)^{\ln\ln\ln k} = k^{\ln\ln\ln k}.$$

Далее, на основании того, что $\ln\ln\ln k > 2$ при достаточно больших k (конкретно, при $k > e^{(e^{(e^2)})} \approx 6\cdot 10^{702}$), выписываем неравенство

$$0 < \frac{1}{(\ln\ln k)^{\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln\ln\ln k}} < \frac{1}{k^2}$$

и делаем вывод, что ряд из **№ 2617** сходится.

Задача **№ 2618** более сложна. Сначала, рассуждая аналогичным образом, получаем равенство

$$(\ln k)^{\ln\ln k} = e^{\ln\ln k\cdot\ln\ln k} = e^{(\ln\ln k)^2}.$$

Затем можно показать, что при достаточно больших k имеет место неравенство

$$(\ln\ln k)^2 < \ln k \tag{25}$$

и значит,

$$\frac{1}{(\ln k)^{\ln\ln k}} = \frac{1}{e^{(\ln\ln k)^2}} > \frac{1}{e^{\ln k}} = \frac{1}{k}\,.$$

Отсюда, вспоминая расходимость гармонического ряда, делаем вывод о расходимости ряда **№ 2618**.

Неравенство (25) совершенно неочевидно и для его вывода нам понадобится аппарат пределов функций и дифференциальное исчисление. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x},$$

который является неопределённостью $\frac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия можно воспользоваться правилом Лопиталя (которое придётся применить дважды):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln^2 x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Вспомним теперь определение предела функции по Гейне: если $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, то для любой последовательности x_k, такой что $x_k\to+\infty$, имеет место $f(x_k)\to 0$. Полагая $x_k=\ln k$, получаем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\ln\ln k)^2}{\ln k}=0,$$

а это означает, что при больших k числитель становится меньше знаменателя и неравенство (25) справедливо.

По теме признаков сравнения для самостоятельного решения рекомендуются задачи **№ 2567**, **№ 2570**, **№ 2616**, **№ 2627**.

Признак	Форма		
	непредельная	предельная	
Даламбера	$\frac{a_{k+1}}{a_k}\geqslant 1$ расходится	$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=q>1$ расходится	
	$\frac{a_{k+1}}{a_k}\leqslant q<1$ сходится	$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{a_{k+1}}{a_k}=q<1$ сходится	
Коши	$\sqrt[k]{a_k}\geqslant 1$ расходится	$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}=q$	$q>1$ расходится
	$\sqrt[k]{a_k}\leqslant q<1$ сходится		$q<1$ сходится

Таблица 1: признаки Даламбера и Коши.

Наряду с признаками сравнения для знакопостоянных рядов наиболее популярны признаки Коши и Даламбера. Они также существуют в предельной и непредельной формах, из которой студенты чаще всего помнят только предельную, да и ту в упрощённом виде (с обыкновенными, а не частичными пределами).

Условия этих признаков приведены в таблице 1, причём нужно заметить, что описанный здесь признак Коши иногда называют *радикальным* — по входящему в него радикалу $\sqrt[k]{a_k}$, так как существует ещё и *интегральный* признак Коши.

Предельные формы обоих признаков имеют одно общее слабое место: если предел равен единице, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя. Здесь следует напомнить результаты [1] § 13, в свете которых для любимой студентами предельной формы упрощённого вида следует важный практический вывод:

> *Если при исследовании ряда одним из предельных признаков Коши или Даламбера получился единичный предел, то пытаться применить к тому же ряду второй из этих двух признаков бессмысленно: либо опять получится единичный предел, либо предел не будет существовать вовсе.*

Прежде чем пытаться применять признаки Коши или Даламбера на практике, настоятельно рекомендуется самостоятельно доказать их непредельные формы — взяв за основу признак сравнения, сделать это несложно.

Заметим ещё, что в признаке Даламбера вместо отношения $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ можно пользоваться отношением любого члена ряда к предыдущему, например, $\frac{a_k}{a_{k-1}}$, если это каким-то образом упрощает выкладки.

Рассмотрение задач начнём с **№ 2579**, в которой студентов неизменно озадачивает выражение $(2k)!$ (Почти всегда находятся студенты, желающие спросить, а не имеет ли места равенство $(2k)! = 2! \cdot k!$ — ответ, разумеется, отрицательный.) Рассматривая общий член ряда

$$a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}\,, \tag{26}$$

приходим к выводу, что здесь удобнее воспользоваться признаком Даламбера: факториалы легко сокращаются. Проделаем это, выписав предварительно a_{k+1}:

$$a_{k+1} = \frac{\big((k+1)!\big)^2}{(2k+2)!} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k!)^2}{(2k+2)(2k+1)\cdot(2k)!} = \frac{(k+1)\cdot(k!)^2}{2(2k+1)\cdot(2k)!} = \frac{k+1}{4k+2}\,a_k. \tag{27}$$

Деля (27) на a_k, получаем

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{4k+2} \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{4}\,,$$

так что ряд с общим членом (26) сходится.

Обратимся теперь к задачам **№ 2580** и **№ 2581(а,б)**. Нетрудно видеть, что все они являются частными случаями ряда

$$\sum\nolimits_k \frac{Q^k k!}{k^k}\,, \qquad Q = \mathrm{const} > 0. \tag{28}$$

Если вспомнить соотношения эквивалентности (9), то здесь удобнее воспользоваться признаком Коши[7] в предельной форме:

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{Q}{k}\sqrt[k]{k!} = \frac{Q}{k}\left(\frac{k}{e}\right)\frac{\sqrt[k]{k!}}{\left(\frac{k}{e}\right)} = \frac{Q}{e}\,\frac{\sqrt[k]{k!}}{\left(\frac{k}{e}\right)}\,.$$

Здесь первый сомножитель постоянен, а второй стремится к единице, так что

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \frac{Q}{e}\,, \qquad e \approx 2.72.$$

Задача **№ 2580** соответствует случаю $Q = 1$, так что в ней ряд сходится. В **№ 2581(а)** полагаем $Q = 2$ и ряд также сходится, а в **№ 2581(б)** нужно взять $Q = 3 > e$ и ряд будет расходиться.

Интереснее всего оказывается случай $Q = e$, как в **№ [4] 12.72**. Предельный признак Коши (а следовательно, и предельный признак Даламбера) не даёт про этот случай никакого ответа. На помощь, однако, приходит *непредельная* форма признака Даламбера:

$$a_{k+1} = \frac{e^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} = \frac{e^{k+1}k!}{(k+1)^k}\,,$$

---

[7] Задачи **№ 2580–81** могут быть решены и с использованием признака Даламбера, если вспомнить замечательный предел (4). Рекомендуется проделать это самостоятельно.

так что

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e^{k+1}k!}{(k+1)^k} \cdot \frac{k^k}{e^k k!} = e \cdot \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^k = \frac{e}{\big(1+\frac{1}{k}\big)^k}\,.$$

Если теперь вспомнить неравенство $(1+\frac{1}{k})^k < e$ из [1] § 6, то $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ и ряд расходится.

Итак, окончательным ответом будет следующее утверждение: *ряд* (28) *сходится при* $0 < Q < e$ *и расходится при* $Q \geqslant e$.

По двум причинам представляет интерес задача **№ 2589.2**. Форма записи общего члена ряда

$$a_k = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}$$

не вызывает сомнений: здесь удобнее признак Коши, в котором

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k-1} = \left(1 - \frac{2}{k+1}\right)^{k-1}. \tag{29}$$

На этом месте студенты часто допускают ошибку. Исходя из того, что $\frac{k-1}{k+1} < 1$, они делают вывод, что $\sqrt[k]{a_k} < 1$, и это само по себе правильно. Однако далее на этом основании объявляется, что ряд сходится по непредельному признаку Коши, и вот *это* уже совсем неправильно! При таком рассуждении напрочь игнорируется величина q ($\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1$), которая стоит в условии вовсе не случайно. Дело в том, что запись «$\varepsilon < 1$» означает, что ε может приближаться к единице *сколь угодно близко*, тогда как «$\varepsilon \leqslant q < 1$» подразумевает *ограниченность* такого приближения: расстояние между единицей и ε не может стать меньше, чем положительное число $(1-q)$.

Решить эту задачу проще по *предельной* форме признака, и здесь кроется второй интересный момент. Переходя к пределу в (29), студенты как правило называют верный результат: $\sqrt[k]{a_k} \to e^{-2}$, но при этом не замечают, что выражение (29) и замечательный предел (4) не тождественны. Действительно, в (4) знаменатель дроби и показатель степени совпадают, а в (29) отличаются. Обосновать же корректность перехода от (29) к (4) студенты затрудняются.

Этот переход на самом деле корректен, так как

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(1 - \frac{2}{k+1}\right)^{k-1} = \frac{(1-\frac{2}{k+1})^{k+1}}{(1-\frac{2}{k+1})^2}\,.$$

Здесь числитель стремится к e^{-2}, а знаменатель к единице (степень его постоянна), так что $\sqrt[k]{a_k} \to e^{-2}$ и по предельному признаку Коши ряд сходится.

Для самостоятельного решения на признаки Коши и Даламбера рекомендуются задачи **№ 2578**, **№ 2583**, **№ 2584**, **№ 2586**, **№ 2589.1**, **№ 2595** и **№ 2596**.

5. Знакопостоянные ряды (дополнение)

Внимательное рассмотрение признаков Коши и Даламбера позволяет обнаружить, что на самом деле они довольно слабы. Так, с их помощью нельзя исследовать даже ряд Дирихле, сходимость и расходимость которого, как мы видели в § 3, достаточно легко обнаруживается чисто алгебраическими рассуждениями.

Несколько более мощное средство исследования даёт признак Раабѐ, который обладает ещё и тем интересным свойством, что в нём присутствует отношение $\frac{a_k}{a_{k+1}}$, обратное к используемому в признаке Даламбера.

Предположим, что начав исследовать некоторый ряд по Даламберу, мы нашли и упростили выражение

$$D_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}\,,$$

однако ни оно само, ни его предел[8] $\mathcal{A}(a_k)$, не позволяют ничего (или почти ничего) сказать о сходимости ряда. Как отмечалось в предыдущем параграфе, пользоваться признаком Коши в такой ситуации бессмысленно.

Зато имеет смысл попытаться найти предел

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{1}{D_k} - 1\right) = D. \tag{30}$$

Теорема Раабе утверждает, что если $D > 1$, то ряд будет сходиться, а при $D < 1$ (в том числе и при $D < 0$, что вполне возможно) — расходиться.

В качестве примера рассмотрим **№ 2599**. Для общего члена ряда справедливо рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{a-d+kd}{b-d+kd}\,a_k, \quad \text{откуда } D_k = \frac{a-d+kd}{b-d+kd} \quad (a, b, d > 0).$$

Предельный признак Даламбера не позволяет сказать о ряде вообще ничего ($\mathcal{A}(a_k) = 1$), а непредельный позволяет выяснить лишь то, что ряд расходится при $a \geqslant b$.

Попробуем теперь найти предел (30):

$$k\left(\frac{1}{D_k} - 1\right) = k \cdot \frac{b-d+kd-(a-d+kd)}{a-d+kd} = \frac{(b-a)k}{a-d+kd}\,,$$

так что

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{1}{D_k} - 1\right) = \frac{b-a}{d}\,.$$

По признаку Раабе ряд расходится при $b - a < d$ (это условие более конкретно, чем $a \geqslant b$) и сходится при $b - a > d$.

Итак, признак Раабе сильнее, чем признак Даламбера. Ещё более мощным инструментом исследования знакопостоянных рядов является *признак Гаусса*, который, к сожалению, формулируется довольно запутанным образом. Приведём здесь наиболее вразумительную его форму:

> *Пусть имеется знакопостоянный ряд $\sum_k a_k$, для членов которого справедливо соотношение*
>
> $$\frac{1}{D_k} = \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k+\alpha} + \theta_k,$$
>
> *где λ, μ и α — некоторые константы, а θ_k — последовательность, по сравнению с которой $\frac{1}{k^2}$ не является пренебрежимо малой[9]. Тогда ряд будет сходиться при $\lambda > 1$ и расходиться при $\lambda < 1$; если же $\lambda = 1$, то ряд будет сходиться при $\mu > 1$ и расходиться при $\mu \leqslant 1$.*

---

[8] Здесь мы воспользовались обозначением предела по Даламберу из [1] § 13.

[9] Иными словами, $k^2\theta_k \to \theta < \infty$.

Как видно, этот признак тоже можно применять, если не сработал признак Даламбера: здесь используется то же отношение соседних членов. И как прежде, вместо $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ можно брать $\frac{a_{k-1}}{a_k}$ и т.п.

В качестве примера на использование признака Гаусса рассмотрим **№ 2598**. Общий член ряда этой задачи удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_{k+1} = a_k \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^p = a_k \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^{-p}.$$

Полагая здесь p натуральным числом и используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$\frac{1}{D_k} = \frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{p}{2k+1} + \underbrace{\frac{p(p-1)}{2(2k+1)^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{6(2k+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)^p}}_{\theta_k}.$$

Всего в этой сумме $(p+1)$ слагаемое; обозначая последние $(p-1)$ за θ_k, убеждаемся, что $k^2\theta_k \to \frac{1}{8}p(p-1) < \infty$. Тогда можно записать

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{(\frac{p}{2})}{k + \frac{1}{2}} + \theta_k.$$

Сопоставляя это выражение с признаком Гаусса, видим что $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Условия признака утверждают, что ряд будет сходиться при $\mu > 1$, т.е., $p > 2$ и расходиться в противном случае.

Последним признаком, который мы рассмотрим в этом параграфе, является *интегральный* признак Коши, требующий представлений о пределе функции и интегральном исчислении.

Пусть требуется исследовать сходимость знакоположительного ряда

$$\sum_{k \geqslant n_0} a_k. \tag{31}$$

Предположим, что существует *положительная и монотонно убывающая*, непрерывная при $x \geqslant n_0$ функция $f(x)$, такая что $f(k) = a_k$. Найдём её первообразную

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Тогда сходимость или расходимость ряда (31) будет определяться тем, существует или не существует у этой первообразной конечный предел при $x \to +\infty$.

Необходимо подчеркнуть, что условия положительности и монотонности функции $f(x)$ в этом признаке очень важны; их нарушение может привести к ошибочности результата. Соответствующий пример рекомендуется построить самостоятельно.

В качестве иллюстрации к интегральному признаку возьмём задачу **№ [4] 12.49**, где требуется исследовать ряд

$$\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

Очевидно, в этой задаче нужно положить $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$: такая функция удовлетворяет всем необходимым условиям. Найдём её первообразную:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}.$$

(Здесь мы не стали писать $\ln|x|$, так как подразумевается $x \geqslant 2$.) Предел такой функции при $x \to +\infty$ существует и равен нулю, так что ряд будет сходиться.

Очень хорошей задачей для самостоятельного решения на интегральный признак Коши является **№ 2621**.

6. Знакопеременные ряды

Понятие абсолютной сходимости, как сходимости ряда из модулей

$$\sum\nolimits_k |a_k|, \tag{32}$$

составленного по ряду (10), обычно не вызывает у студентов вопросов. Как правило, не вызывает вопросов и утверждение о том, что из абсолютной сходимости следует «обыкновенная» — однако просьба доказать его (задача **№ [4] 12.16**) часто ввергает студентов в панику.

На самом деле всё доказательство укладывается в две-три строки: для частичных сумм рядов (10) и (32) из неравенства треугольника следует

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\mathcal{S}_{n+p}(a_k) - \mathcal{S}_n(a_k)| &= \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = \\ &= \mathcal{S}_{n+p}(|a_k|) - \mathcal{S}_n(|a_k|) = \big|\mathcal{S}_{n+p}(|a_k|) - \mathcal{S}_n(|a_k|)\big|, \end{aligned}$$

так что если ряд (32) удовлетворяет критерию Коши, то ряд (10) удовлетворяет ему тем более.

Итак, абсолютная сходимость является более сильным понятием по сравнению с обычной. Естественно тогда начинать исследование знакопеременных рядов именно с абсолютной сходимости. При этом, однако, будем помнить два важных факта:

1. Для знакопостоянных рядов понятия абсолютной и условной сходимости совпадают.
2. Ряды, в которых количество перемен знака *конечно*, не являются в полном смысле этого слова знакопеременными. Удалив из такого ряда конечное число членов (и не изменив тем характер его сходимости), мы получим знакопостоянный ряд, который либо сходится абсолютно (согласно предыдущему пункту), либо расходится к бесконечности.

Для исследования абсолютной сходимости можно пользоваться всем уже рассмотренным аппаратом: признаки сравнения, Коши, Даламбера и т.д. Если окажется, что ряд сходится абсолютно, то исследования на этом заканчиваются. Если окажется, что ряд не удовлетворяет необходимому условию сходимости, то это тоже будет окончательным ответом.

Именно таковы задачи **№ 2660** и **№ 2673**. В первой из них ряд сходится абсолютно, так как

$$\sum\nolimits_k |a_k| = \sum\nolimits_k \frac{1}{2^k}\,,$$

и мы получаем геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$. Во второй общий член ряда не стремится к нулю, так как $\sqrt[n]{n} \to 1$ (этот предел мы получили в [1]).

Предположим, однако, что необходимое условие сходимости выполняется, но ряд не сходится абсолютно. В этом случае его нужно исследовать «как есть» на условную сходимость, и теперь ранее рассмотренный аппарат — кроме критерия[10] Коши — оказывается неприменим. Возникает необходимость в новых признаках, ориентированных именно на знакопеременные ряды.

---

[10] *Критерия*, а не *признака*!

Такие признаки носят имя Абеля и Дирихле; оба они сформулированы для произвольных рядов вида

$$\sum\nolimits_k x_k y_k. \tag{33}$$

Соответствующие теоремы утверждают, что если для x_k и y_k выполняются условия, перечисленные в таблице 2, то ряд (33) сходится вообще говоря не абсолютно.

К этим двум теоремам примыкает вытекающий из признака Дирихле *признак Лейбница*, область применения которого довольно специфична. В нём предполагается, что

$$x_k = (-1)^k \quad \text{или} \quad x_k = (-1)^{k\pm1},$$

а $y_k > 0$. Иными словами, признак Лейбница предназначен для таких — и только таких! — рядов, в которых знаки чередуются *строго через один*. Мы будем называть такие ряды *знакочередующимися*.

ряд признак	x_k	y_k
Абеля	$\sum_k x_k$ сходится	монотонна, ограничена
Дирихле	$\forall n: \ \left\lvert\sum_{k\leqslant n} x_k\right\rvert \leqslant C < \infty$	монотонна, $y_k \to 0$
Лейбница	$x_k = (-1)^{k[\pm1]}$	монотонна, $y_k > 0$, $y_k \to 0$

Таблица 2: признаки Абеля, Дирихле и Лейбница.

Формулировка признака Лейбница имеет два важных дополнения. Если знакочередующийся ряд сходится, то, во-первых, для его суммы S справедлива оценка $|S| < y_1$, а во-вторых, скорость сходимости оценивается неравенством

$$|\mathbb{S}_n - S| \leqslant y_n.$$

Рассмотрим теперь важную задачу **№ 2693** о сходимости ряда

$$\sum\nolimits_k l_k, \quad l_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}\,, \tag{34}$$

который называют *обобщённым рядом Лейбница.*

Составляя ряд из модулей, получаем

$$\sum\nolimits_k |l_k| = \sum\nolimits_k \frac{1}{k^s}\,,$$

а этот ряд совпадает с рядом Дирихле (16). Как мы уже знаем, он сходится при $s > 1$ и расходится из-за невыполнения необходимого условия при $s \leqslant 0$.

Итак, интерес представляет лишь случай $0 < s \leqslant 1$. Здесь как раз подходит признак Лейбница, в котором нужно положить

$$y_k = \frac{1}{k^s}\,.$$

Видим, что при любом $s > 0$ последовательность y_k монотонно убывает и стремится к нулю, так что условия признака выполняются.

Окончательно записываем ответ: обобщённый ряд Лейбница (34) расходится при $s \leqslant 0$, абсолютно сходится при $s > 1$ и условно сходится при $0 < s \leqslant 1$.

При $s = 1$ нетрудно найти и сумму ряда (задача **№ 2661**). Подстановка в (34) даёт «обычный» ряд Лейбница

$$\sum\nolimits_k \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,,$$

который, как мы установили, сходится (пусть и не абсолютно) к некоторой сумме S. Если так, то к S должна сходиться и любая подпоследовательность частичных сумм, в том числе $\mathcal{S}_{2n}$. Выпишем эти чётные подпоследовательности:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_2 = 1 - \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{1}{2} - 1 = \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1;\\
&\mathcal{S}_4 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - (1 + \tfrac{1}{2}) = \mathcal{H}_4 - \mathcal{H}_2;\\
&\dots\\
&\mathcal{S}_{2n} = \mathcal{H}_{2n} - \mathcal{H}_n.
\end{aligned}$$

Здесь нам удалось свести частичные суммы к формуле Эйлера (3). Применяя её, получаем

$$\mathcal{S}_{2n} = \ln 2n - \ln n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n = \ln\frac{2n}{n} + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n = \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n.$$

Так как последовательности ε_n и ε_{2n} являются бесконечно малыми, имеет место сходимость $\mathcal{S}_{2n} \to \ln 2$ и следовательно, $S = \ln 2$.

Теперь, зная о характере сходимости ряда (34), мы можем решить **№ 2683**. Ряд из этой задачи не обладает абсолютной сходимостью, так как

$$0 < |x_k| = \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\sqrt[100]{k}} = \frac{k-1}{k^{1/100}(k+1)} \sim \frac{1}{k^{1/100}}\,,$$

а ряд Дирихле при $s = \frac{1}{100} < 1$ расходится. Ответ на вопрос об условной сходимости даёт признак Абеля, в котором можно положить

$$x_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt[100]{k}} \quad \text{и} \quad y_k = \frac{k-1}{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1}\,.$$

Здесь последовательность y_k монотонно возрастает и ограничена ($0 < y_k < 1$), а ряд $\sum_k x_k$ сходится, так что ряд из **№ 2683** сходится условно.

Сходимость ряда

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \dots$$

из задачи **№ 2664** устанавливается на основании признака Дирихле. В нём нужно положить

$$x_k = \underbrace{1, 1, 1}_{3}, \underbrace{-1, -1, -1}_{3}, \underbrace{1, 1, 1}_{3}, \dots \quad \text{и} \quad y_k = \frac{1}{k}.$$

Последовательность y_k монотонно убывает и ограничена ($0 < y_k \leqslant 1$), а для частичных сумм x_k имеем

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$\mathcal{S}_n$	1	2	3	2	1	0	1	2	…

,

так что $0 \leqslant \mathcal{S}_n \leqslant 3$, условия признака выполняются и ряд сходится условно (абсолютно он не сходится, так как по модулю совпадает с гармоническим рядом).

Если теперь вспомнить формулы (8) из § 1, то можно видеть, что

$$\Bigl|\sum_{k\leqslant n}\sin k\varphi\Bigr| \leqslant \frac{1}{\bigl|\sin\frac{\varphi}{2}\bigr|} \quad \text{и} \quad \Bigl|\sum_{k\leqslant n}\cos k\varphi\Bigr| \leqslant \frac{1}{\bigl|\sin\frac{\varphi}{2}\bigr|} \quad \text{при } \varphi \neq 2\pi n. \tag{35}$$

Эти неравенства очень удобны для применения в признаке Дирихле. Например, именно так решается **№ 2686**, где предлагается исследовать на сходимость ряд

$$\sum\nolimits_k \frac{\sin\frac{\pi k}{12}}{\ln k}\,.$$

Здесь нужно положить $x_k = \sin\frac{\pi k}{12}$, $y_k = \frac{1}{\ln k}$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$. Тогда, на основании неравенств (35),

$$\Bigl|\sum_{k\leqslant n}\sin\tfrac{\pi k}{12}\Bigr| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{24}} \approx 7.7,$$

а последовательность y_k монотонно стремится к нулю, так что по признаку Дирихле ряд сходится.

Аналогично, с использованием неравенств (35) и признака Дирихле, решаются задачи **№ 2697** и **№ 2698**. Сто́ит упомянуть, что студенты иногда неверно запоминают одно из условий признака и в решении довольствуются ограниченностью последовательности x_k, тогда как требуется *ограниченность частичных сумм этой последовательности.*

Наконец, последнее, что нужно заметить о признаках Абеля и Дирихле, это возможность применять их и к *знакопостоянным* рядам. При этом, разумеется, если ряд окажется сходящимся, то его сходимость будет абсолютной.

Для самостоятельного решения хорошо подходят задачи **№ 2575.1**, **№ 2669**, **№ 2678**, **№ 2679**. Также можно порекомендовать исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\frac{\ln k}{k}, \quad \sum\nolimits_k \frac{\sin k\varphi}{\ln^k 3} \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_k \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

7. Парадоксы бесконечного суммирования

В этом параграфе мы рассмотрим парадоксальное поведение рядов, значительно отличающее их от обычных конечных сумм. В качестве одного из примеров возьмём заведомо расходящийся ряд чередующихся знаков

$$\sum\nolimits_k (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{36}$$

С его помощью легко показать, что *суммирование рядов не обладает свойством ассоциативности.* Для этого выпишем слагаемые, составляющие ряд и сгруппируем их скобками, например, так:

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots \tag{37}$$

Очевидно, каждая из скобок в этой сумме равна нулю, так что сумма (37) должна быть равна единице. Однако, с другой стороны, скобки можно расставить не только таким способом. Представим тот же самый ряд (36) в виде

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots \tag{38}$$

Рассуждая точно так же, как и с (37), приходим к выводу, что сумма (38) равна нулю.

Итак, простой расстановкой скобок в ряде можно не только превратить расходящийся ряд в сходящийся, но и обеспечить сходимость этого ряда к разным суммам!

Для полноты картины приведём ещё одно рассуждение, принадлежащее Л. Эйлеру. Ряд (36) содержит бесконечно много слагаемых, поэтому можно записать, что он удовлетворяет уравнению

$$\sum\nolimits_k (-1)^{k+1} = 1 - \sum\nolimits_k (-1)^{k+1},$$

а так как уравнение $S = 1 - S$ имеет решение $S = \frac{1}{2}$, то это число и должно быть *сопоставлено*[11] с рядом. Кстати, с подобной логикой мы уже сталкивались в [1] § 8, где получили совсем парадоксальное соотношение

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... \overset{?!}{=} -1.$$

Причина подобных парадоксов кроется именно в *расходимости* рядов. Она означает, что расходится последовательность частичных сумм — но, по теореме Больцано–Вейерштрасса, из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности, что мы фактически и делали, расставляя в ряде скобки.

С другой стороны, если последовательность частичных сумм сходится (хотя бы и к бесконечности), то и любая её подпоследовательность сходится к этому же пределу. Стало быть, в *сходящемся* ряде расстановкой скобок нельзя изменить ни характер сходимости, ни сумму ряда.

Приведёнными рассуждениями мы доказали три факта:

1. В *сходящемся* (хотя бы и не абсолютно) ряде можно расставлять скобки как угодно, и ряд останется сходящимся к той же сумме (задача **№ 2554**, она же **№ [4] 12.17**).
2. Ряд, расходящийся *к бесконечности*, останется таковым при любой расстановке скобок.
3. Ряд, расходящийся *вообще*, можно сделать сходящимся путём расстановки скобок. При этом разные способы расстановки могут приводить к разным суммам ряда.

Наконец, рассмотрим ещё одну интересную иллюстрацию неассоциативности рядов. Возьмём ряд Лейбница

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots \tag{39}$$

который, как мы установили, сходится условно (т.е. не абсолютно) к $\ln 2$. Расставим в нём скобки, сгруппировав слагаемые попарно:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)}_{=\frac{1}{2k(2k-1)}} + \ldots \tag{40}$$

---

[11] Современный математик сказал бы, что здесь речь идёт о введении некоторого функционала над пространством рядов. Во времена Эйлера функциональный анализ не был известен и хотя он (как впрочем и некоторые другие современные ему математики) постоянно подчёркивал, что в подобных случаях имеется в виду не сумма ряда, а лишь некоторая величина, определённым образом характеризующая поведение ряда и иногда помогающая работать с ним, такие заявления часто вызывали возражения. О нешуточных страстях, кипевших вокруг понятия суммы ряда, очень интересно написано у Г. Харди в [8] гл. I–II. Настоятельно рекомендуется ознакомиться с этой исторической справкой.

Как видно, в результате группировки получился знакоположительный ряд, общий член которого удовлетворяет неравенству

$$0 < \frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{4k^2 - 2k} < \frac{1}{k^2}\,.$$

Вспоминая, что ряд Дирихле при $s = 2$ сходится, по признаку сравнения заключаем, что ряд (40) сходится *абсолютно.*

Итак, мы построили пример, в котором группировка членов условно сходящегося ряда «усилила» его сходимость до абсолютной. На самом деле подобное можно проделать с *любым* условно сходящимся рядом (задача **№ 2656**). Рекомендуется также самостоятельно решить задачу **№ 2555**.

Рассмотрим теперь вопрос о коммутативности рядов, но прежде остановимся на одном важном моменте. Вернёмся снова к ряду (36), в котором знаки чередуются *через один*, и запишем похожий ряд, где *за двумя положительными следует одно отрицательное слагаемое*:

$$1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{41}$$

На вопрос «можно ли из (36) получить (41)», заданный студентам, обычно сразу следует уверенное «нет!» Объясняют это тем, что «в ряде (36) положительных и отрицательных слагаемых *поровну*, а в ряде (41) положительных *вдвое больше*, чем отрицательных».

Утверждение это, кажущееся на первый взгляд правильным, в действительности неверно, так как интуитивные понятия о количестве просто-напросто не подходят для анализа бесконечных.

Проанализируем ряды (36) и (41) более внимательно. В (36) отрицательные слагаемые занимают чётные позиции ($k = 2i$), совокупность которых образует счётное множество. В (41) отрицательные слагаемые стоят на позициях, кратных трём ($k = 3i$), множество которых также счётно. Поскольку любые два счётные множества эквивалентны, приходим отсюда к выводу, что количество отрицательных слагаемых в этих двух рядах *одинаково.*

Далее обратимся к положительным слагаемым. В ряде (36) они стоят на нечётных позициях ($k = 2i - 1$) и образуют счётное множество. В ряде (41) они занимают позиции вида $k = 3i - 2$ и $k = 3i - 1$, образуя множество, являющееся *объединением двух счётных.* Вспоминая, что объединение конечного числа счётных множеств счётно, получаем, что и положительных элементов в рядах (36) и (41) поровну.

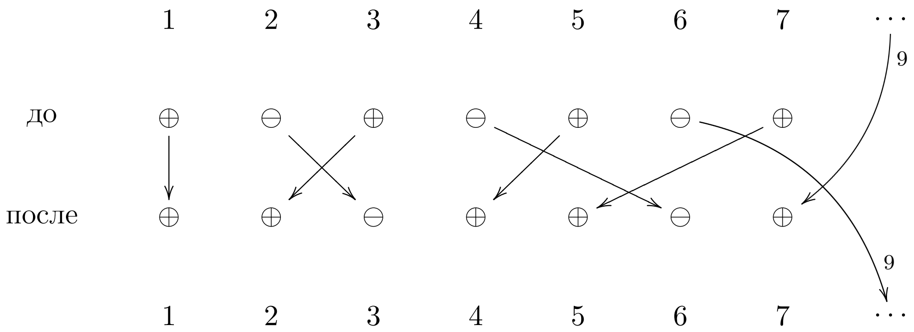
Итак, с точки зрения числà и вида слагаемых наши два ряда суть одно и то же, просто в (41) по сравнению с (36) слагаемые переставлены. Способ перестановки указан на рис. 2 и в сопровождающей его таблице, где знаками $\oplus$ и $\ominus$ обозначены положительные и отрицательные элементы соответственно.

Чтобы из ряда (36) получить (41), нужно смещать положительные слагаемые на 0,1,1,2,2,3,3,4,4,... позиций влево, а отрицательные — на 1,2,3,4,5,... позиций влево. Отсюда видно, что каждое слагаемое исходного ряда обязательно найдёт себе место в результирующем, а кажущееся несоответствие рядов связано с постоянным увеличением смещения.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости рядов (36) и (41). Оба они, разумеется, расходятся: их общий член удовлетворяет равенству $|a_k| = 1$ и следовательно, не стремится к нулю. Однако, если выписать их частичные суммы, то окажется, что расходятся они *по-разному.*

Действительно, для частичных сумм (36) имеет место

$$\mathcal{S}_1 = 1, \quad \mathcal{S}_2 = 0, \quad \mathcal{S}_3 = 1, \quad \mathcal{S}_4 = 0, \ldots \quad \mathcal{S}_n = \tfrac{1}{2}\big[1 - (-1)^n\big],$$



знак	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
индекс до	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
...после	1	3	2	6	4	9	5	12	7	15	8	18	10
сдвиг	0	+1	−1	+2	−1	+3	−2	+4	−2	+5	−3	+6	−3

Рис. 2: перестановка ряда чередующихся знаков.

а эта последовательность не имеет предела, хоть и ограничена. Следовательно, ряд (36) расходится *вообще.*

С другой стороны, для частичных сумм (41) получаем

$$\mathcal{S}_1 = 1, \quad \mathcal{S}_2 = 2, \quad \mathcal{S}_3 = 1, \quad \mathcal{S}_4 = 2, \quad \mathcal{S}_5 = 3, \quad \mathcal{S}_6 = 2, \quad \mathcal{S}_7 = 3, \quad \mathcal{S}_8 = 4, \ldots$$

Выделяя отсюда три подпоследовательности $\mathcal{S}_{3i-2}$, $\mathcal{S}_{3i-1}$ и $\mathcal{S}_{3i}$, обнаруживаем

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{S}_{3i-2} = i \geqslant \frac{1}{3}(3i-2) \\ \mathcal{S}_{3i-1} = i+1 \geqslant \frac{1}{3}(3i-1) \\ \mathcal{S}_{3i} = i \geqslant \frac{1}{3} \cdot 3i \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{S}_n \geqslant \frac{n}{3}$$

и значит, ряд (41) расходится *к бесконечности.* Его частичные суммы, в отличие от исходного ряда (36), неограничены.

Сказанного уже вполне достаточно, чтобы с уверенностью утверждать: суммирование членов ряда в общем случае некоммутативно. Как оказывается, оно даже *ещё более некоммутативно, чем неассоциативно.* Сейчас мы убедимся в этом на ряде Лейбница (39).

Заметим прежде всего, что каждый из двух рядов

$$\sum\nolimits_k \frac{1}{2k-1} \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_k \frac{1}{2k}, \tag{42}$$

разность которых равна ряду Лейбница, расходится к бесконечности (этот факт легко устанавливается из того, что оба они сопоставимы с гармоническим рядом). Следовательно, в каждом из этих рядов можно, начав с произвольной позиции и взяв достаточно большое число слагаемых, получить сумму, превосходящую единицу (будь это не так, частичные суммы были бы ограничены сверху).

В таком случае, начнём с первого слагаемого ряда Лейбница и возьмём столько положительных членов, чтобы их сумма превзошла единицу:

$$1 + \frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2k-1} = \frac{4}{3} > 1.$$

Нам понадобилось два слагаемых; положим $n_1 = 2$.

Припишем теперь к сумме столько отрицательных слагаемых, чтобы результат стал меньше единицы:

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}<1.$$

Теперь добавим в сумму столько положительных слагаемых, чтобы результат стал больше двойки:

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{21}\frac{1}{2k-1}=\frac{27438157533868993}{13691261858724450}\approx 2.004>2.$$

В этой сумме 22 слагаемых; положим $n_2 = 22$.

Продолжая таким же образом, припишем столько отрицательных слагаемых, чтобы уменьшить сумму ниже двойки и затем столько положительных, чтобы сделать её больше тройки:

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{21}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4}+\sum_{k=22}^{254}\frac{1}{2k-1}\approx 3.0004>3.$$

Здесь 256 слагаемых, так что $n_3 = 256$.

Далее (разумеется, не без помощи компьютера), получаем $n_4 = 2621$, $n_5 = 24835$ и т.п. Итак, мы переставили члены ряда Лейбница и в получившемся ряде обнаружили подпоследовательность частичных сумм $\mathcal{S}_{n_i}$ такую, что $\mathcal{S}_{n_i} > i$. То есть $\mathcal{S}_{n_i} \to +\infty$ и результирующий ряд расходится — а ведь он получен из сходящегося! Этот пример указывает путь к решению очень похожей задачи **№ 2663**.

На сей раз ключевую роль в наших рассуждениях сыграло то, что ряд Лейбница сходится *лишь условно*. Из данного факта мы сделали важные выводы относительно расходимости к бесконечности рядов (42) — именно эти выводы и позволили нам переставить сходящийся ряд в расходящийся.

Заметим теперь, что мы могли действовать и по-другому. Задавшись произвольным $\alpha = \text{const} \in \mathbb{R}$, можно взять столько ($n_1$) положительных членов, чтобы получившаяся сумма превзошла α ($\mathcal{S}_{n_1} > \alpha$), затем приписать к ним столько (m_1) отрицательных членов, сколько понадобится для достижения $\mathcal{S}_{n_1+m_1} < \alpha$, затем вновь положительными слагаемыми увеличить её сверх α, затем уменьшить ниже α и т.д. Полученный ряд, очевидно, будет сходиться к α.

Рассуждая подобным образом (и исходя из того, что взятые по отдельности положительные и отрицательные члены условно сходящегося ряда образуют расходящиеся к бесконечности ряды[12]), Б. Риман получил замечательную теорему:

> *Сумму условно сходящегося ряда путём перестановки его членов можно сделать равной любому наперёд заданному числу, конечному или бесконечному.*

Упомянем без доказательства ещё один важный факт: абсолютно сходящиеся ряды при любых перестановках членов сохраняют характер сходимости и сумму. За подробными рассуждениями на эту тему можно обратиться к [5] т. 2, гл. XI, § 4, п. 387 и [6] т. 2, гл. IV, § 34, п. 34.12.

---

[12] Напомним, что ряды, в которых знак меняется лишь конечное число раз, в сущности не являются знакопеременными и могут либо расходиться к бесконечности, либо сходиться абсолютно.

Наконец, если предположить, что сдвиг элементов ряда при перестановке ограничен некоторой константой (например, ни один член не сдвигается более чем на пять позиций влево или вправо), то сумма и характер сходимости *любого* ряда не меняются (задача **№ 2658**). Это доказывается на основании неравенств для частичных сумм и теоремы «о двух милиционерах» для последовательностей.

8. Ряд для экспоненты

В этом параграфе мы получим представление числа e в виде ряда, сходящегося к нему как к сумме. Для этого нам понадобится вспомнить рассуждения о пределе последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{43}$$

приведённые в [1] § 6. Во-первых, мы доказали факт сходимость этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e.$$

Во-вторых, мы доказали, что эта сходимость является сходимостью *снизу*, так что $x_n < e$.

Применим к x_n формулу бинома Ньютона. Равенство (43) примет тогда вид

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{C}_n^k}{n^k}, \qquad \mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{44}$$

В формуле биномиального коэффициента сократим $n!$ и $(n-k)!$ следующим образом:

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}(n-k+i).$$

Теперь подставим это выражение в (44) и воспользуемся тем фактом, что n^k представляет собой произведение k сомножителей, каждый из которых равен n:

$$\frac{\mathrm{C}_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\frac{n-k+i}{n} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{k-i}{n}\right).$$

С учётом этого (44) принимает вид

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{k-i}{n}\right). \tag{45}$$

В этой формуле каждый сомножитель произведений не превосходит единицу, так что каждое произведение тоже не больше единицы. Отбрасывая их, мы лишь увеличиваем результат:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}. \tag{46}$$

Теперь заметим, что в сумме (45) все слагаемые положительны. Возьмём произвольное число m, такое что $1 \leqslant m < n$, и оставим от суммы лишь первые m слагаемых. Результат, естественно, уменьшится:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{k-i}{n}\right), \qquad m < n. \tag{47}$$

Число сомножителей в каждом слагаемом конечно и не превосходит m. Каждое из них, очевидно, стремится к единице при $n \to \infty$. Таким образом, переходя в (47) к пределу при фиксированном m, получаем неравенство

$$e \geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\,, \tag{48}$$

которое справедливо для любого натурального m.

Объединяя неравенства (46) и (48), получаем[13]

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant e,$$

откуда заключаем, что по теореме «о двух милиционерах» последовательность

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

сходится к числу e. Этим мы почти решили задачу **№ 72**.

Последовательность y_n можно естественным образом рассматривать как частичные суммы ряда

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} = e,$$

и это тот самый ряд, который мы искали.

Как оказывается, скорость сходимости этого ряда допускает оценивание в виде следующего неравенства:

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n \cdot n!}\,. \tag{49}$$

Вывод этой оценки завершает решение **№ 72** и выглядит следующим образом.

Из того, что $y_n \to e$, следует, что число e можно представить в виде суммы

$$e = y_n + r_n, \qquad r_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k!} \to 0.$$

Здесь сходимость ряда r_n при любом n гарантирована сходимостью $y_n \to e$. Тогда, с одной стороны,

$$e - y_n = r_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k!} > 0. \tag{50}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right] \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right]. \end{aligned} \tag{51}$$

---

[13] Очевидно, в неравенстве (48) можно вместо m написать любую другую букву.

Выражение в квадратных скобках образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{n+2} < 1$. Сумма её составляет

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1},$$

так что, объединяя (50) и (51), получаем

$$0 < e - y_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n!}. \tag{52}$$

До оценки (49) остался один шаг[14], заключающийся в выводе неравенства

$$\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}.$$

Оно справедливо, так как следует из безусловно справедливого соотношения

$$1 > \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Тем самым формула (49) доказана. Рекомендуется самостоятельно доказать, что из неё следует иррациональность числа e.

Итоги

Список задач из сборников [3] и [4], полные или частичные решения которых (или хотя бы указания к решению) представлены в этих заметках, приведён в таблице 3. Номера задач перечислены по параграфам в порядке их упоминания в тексте, а в последней строке таблицы приведён список задач, решённых в [1] и имеющих то или иное отношение к числовым рядам.

§ 2 (стр. 4)	2552, 2551, 2548
§ 4 (стр. 10)	2621, 2656, 2612, 2626, 2617, 2618, 2579, 2580, 2581(а,б), 2589.2 [4]: 12.75, 12.69, 12.72
§ 5 (стр. 16)	2599, 2598 [4]: 12.49
§ 6 (стр. 19)	2660, 2673, 2693, 2661, 2683, 2664, 2697, 2698 [4]: 12.16
§ 7 (стр. 22)	2554, 2656, 2663, 2658 [4]: 12.17
§ 8 (стр. 27)	72
Решено в [1]:	2549, 56, 2987, 2576, 88, 84, 146, 2593, 141

Таблица 3: указатель решённых задач.

Кроме того, был предложен для самостоятельного решения набор задач из [3] и сформулировано несколько упражнений «не из задачника». Их полный список (кое-где с добавлением указаний) приводится ниже.

---

[14] В принципе, можно было бы его и не делать, так как оценка (52) точнее, чем (49). Однако (49) выглядит более изящно и требует меньшего количества вычислений. С третьей стороны, прямо из (52) следует совсем очевидная оценка $r_n \leqslant \frac{2}{(n+1)!}$, так как $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant 2$.

- Найти тригонометрическую сумму $\sum_{k\leqslant n}(-1)^{k+1}\sin(2k-1)\varphi$;
- Решить задачи **№ 2567**, **№ 2570**, **№ 2616**, **№ 2627** с помощью признаков сравнения;
- Доказать непредельные формы признаков Коши и Даламбера;
- Решить задачи **№ 2580–81** с помощью признака Даламбера и предела (4);
- Решить задачи **№ 2578**, **№ 2583**, **№ 2584**, **№ 2586**, **№ 2589.1**, **№ 2595**, **№ 2596** с помощью признаков Коши и Даламбера;
- Убедиться, что признаки Коши и Даламбера неприменимы к ряду Дирихле;
- Построить пример на интегральный признак Коши, в котором отсутствие монотонности функции $f(x)$ приводит к неверному выводу о сходимости ряда;
- С помощью интегрального признака Коши исследовать сходимость ряда из задачи **№ 2621**. Указание: необходимо воспользоваться неравенствами для $n!$ из [1];
- С помощью признаков Абеля и Дирихле решить задачи **№ 2575.1**, **№ 2669**, **№ 2678**, **№ 2679**;
- Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\frac{\ln k}{k}, \quad \sum\nolimits_k \frac{\sin k\varphi}{\ln^k 3} \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_k \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

- Решить задачу **№ 2555** о сходимости перегруппированного ряда;
- На основании формул (49)–(50) доказать иррациональность числа e.

Список литературы

[1] М. Баландин *Предел числовой последовательности.* — Рукопись, 2004.

[2] Л. Эйлер *Введение в анализ бесконечных.* /пер. с лат. — М.: Физматлит, 1961.

[3] Б. Демидович[15] *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1972.

[4] *Сборник задач по математике для втузов: специальные разделы математического анализа.* /под ред. Б. Демидовича. — М.: Наука, 1986.

[5] Г. Фихтенгольц *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* — СПб.: Лань, 1997.

[6] Л. Кудрявцев *Курс математического анализа в 3 томах.* — М.: Высш. шк., 1988.

[7] Д. Кнут, Р. Грэхем, О. Паташник *Конкретная математика: основание информатики.* /пер. с англ. — М.: Мир, 1998.

[8] Г. Харди *Расходящиеся ряды.* /пер. с англ. — 1951.

---

[15] Специально указано старое издание задачника, так как в последнем издании 2002 года допущено много опечаток и поменялась нумерация задач, причём изменения коснулись задач, упомянутых в этих заметках.