Предел числовой последовательности

М. Баландин*

Февраль–октябрь 2004

Аннотация

Рассматриваются вопросы, связанные с решением задач по теме «Предел числовой последовательности» из первого семестра курса математического анализа. Приводятся примеры решения задач, разбираются типичные студенческие ошибки с указанием соответствующих контрпримеров.

Предисловие

Эти заметки написаны как обзор методов решения задач для студентов, с указанием характерных ошибок, при этом студентами совершаемых. В них также подробно обсуждаются некоторые результаты, являющиеся сейчас классикой математического анализа.

Абсолютно лучшими книгами по вопросам, связанным с числовыми последовательностями и рядами, являются [1] и [2], несмотря на то, что первая из них написана 256 лет назад — круглая, кстати, дата! — а вторая вовсе не является учебником по классическому анализу. Много очень хороших примеров содержится в [4] — следует только иметь в виду, что вместо термина «последовательность» Г. Фихтенгольц употребляет старомодное слово «варианта».

В качестве источника задач для данного обзора выбран сборник Б. Демидовича [3]. С ним будет иметь место небольшое разночтение: в задачнике сходящимися считаются только последовательности, имеющие *конечный* предел, а в этих заметках бесконечно большие последовательности также будут считаться сходящимися.

В некоторых параграфах предполагается знакомство студента с понятием предела и непрерывности функции, хотя в принципе интуитивного представления о непрерывности как отсутствии разрывов графика почти всегда достаточно.

Используемые обозначения вполне стандартны и ничего необычного не содержат. Нужно только сказать несколько слов про скобки $\lceil x \rceil$, традиционно используемые для обозначения округления вверх. Модифицируем операцию: условимся, что результатом её будет являться *наименьшее натуральное число среди всех, превосходящих данное.* То есть, например, $\lceil 1 \rceil = \lceil 1.5 \rceil = 2$, $\lceil -3 \rceil = 1$ и т.д.:

$$\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{N} : \ y > x\}.$$

Здесь предполагается, что ряд натуральных чисел $\mathbb{N}$ начинается с единицы. Введённая операция удовлетворяет неравенству $x < \lceil x \rceil$, а для *неотрицательных* чисел, кроме того, справедливо неравенство

$$x < \lceil x \rceil \leqslant x + 1, \quad x \geqslant 0, \tag{1}$$

причём равенство $\lceil x \rceil = x + 1$ имеет место в том и только том случае, когда $x \in \mathbb{N}$.

*Кафедра прикладной математики НГТУ.

1. Индукция и свёртка

Рассмотрение последовательностей начнём с математической индукции: во-первых, этот метод предназначен для доказательства свойств на счётных множествах, к которым последовательности имеют самое непосредственное отношение; во-вторых, ряд доказываемых здесь равенств и неравенств, равно как и сам метод, понадобятся нам в дальнейшем.

Вспомним суть метода (в современном виде его изложил Б. Паскаль в 1654 году). Пусть имеется какая-то формула $P(n)$, например[1]

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

Допустим, что она справедлива при некотором $n = k \in \mathbb{N}$. В данном случае нетрудно проверить, что при $k = 1$ получается тождество

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Если теперь из справедливости формулы при некотором $n \geqslant k$ следует её справедливость и при $n+1$, то формула справедлива при *всех* $n \geqslant k$.

Для формулы (2) это означает, что если нам удастся эквивалентными алгебраическими преобразованиями вывести из неё[2] формулу $P(n+1)$:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \qquad (3)$$

то (2) имеет место для всех $n \in \mathbb{N}$.

Попробуем прийти от предположительно справедливой (2) к (3). Сделать это проще всего, добавив к обеим частям слагаемое $(n+1)^2$:

$$\overbrace{\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}_{P_L(n)} + (n+1)^2}^{P_L(n+1)} = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{P_R(n)} + (n+1)^2.$$

Левая часть уже имеет требуемый вид. Преобразуем правую:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Итак, переход от (2) к (3) удался, и тем самым формула (2) доказана. Кстати, это была задача **№ 2**. Её постановка восходит ещё к Архимеду, хотя в те времена алгебраической символики, разумеется, не существовало.

Существует и другой путь доказательства по индукции, который рассмотрим на примере задачи **№ 10.1(в)**. Просят доказать неравенство

$$\left|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k, \quad x_k \in [0, \pi]. \qquad (4)$$

[1] Формула может быть равенством или неравенством. Для краткости будем её *левую* часть обозначать $P_L(n)$, а *правую* — $P_R(n)$.

[2] Не могу удержаться от того, чтобы пнуть современное школьное образование. Сплошь и рядом первокурсники — вчерашние школьники — задают вопрос «а как из формулы для n получить формулу для $n+1$?» Ответ «просто подставьте $n+1$ вместо n» вгоняет их в глубокий ступор и глупейшие ошибки. Постепенно я научился отвечать: «подставьте в формулу вместо n выражение $N+1$, упростите и замените N большое на n малое!» Видимо, такой ответ не вызывает в головах студентов подстановочной рекурсии и как-то работает.

Его справедливость при $n = 1$ вопросов не вызывает[3]: так как $x_k \in [0, \pi]$, то $|\sin x_k| = \sin x_k$ и

$$|\sin x_1| = \sin x_1 \leqslant \sin x_1.$$

Далее нам нужно показать, что если справедлива формула $P(n)$, задаваемая неравенством (4), то справедлива и формула $P(n+1)$:

$$\Big|\sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k. \tag{5}$$

Начнём с того, что запишем $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}$ и воспользуемся формулой синуса суммы:

$$\underbrace{\Big|\sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big|}_{P_L(n+1)} = \Big|\sin\Big[\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\Big]\Big| = \Big|\sin\Big[\sum_{k=1}^{n} x_k\Big] \cos x_{n+1} + \cos\Big[\sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big] \sin x_{n+1}\Big|.$$

По неравенству треугольника $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ имеем

$$\underbrace{\Big|\sin \sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big|}_{P_L(n+1)} \leqslant \underbrace{\Big|\sin \sum_{k=1}^{n} x_k\Big|}_{P_L(n)} \cdot \overbrace{\Big|\cos x_{n+1}\Big|}^{\leqslant 1} + \underbrace{\Big|\cos \sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big|}_{\leqslant 1} \cdot \overbrace{\Big|\sin x_{n+1}\Big|}^{=\sin x_{n+1}}$$

Итак, мы установили, что

$$P_L(n+1) \leqslant P_L(n) + \sin x_{n+1}. \tag{6}$$

Теперь вспомним, что по предположению индукции $P_L(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$ и значит,

$$P_L(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k + \sin x_{n+1} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k}_{P_R(n+1)}.$$

Тем самым, формула (4) доказана для всех $n \in \mathbb{N}$.

Типичной студенческой ошибкой является следующее заблуждение: допустим, что $P(n)$ имеет место — разве тогда простая «замена переменной» n на $n+1$ не сохранит его справедливость? Ведь так можно доказать вообще всё что угодно!

Ответ очень прост: в общем случае не сохранит! И вот соответствующий пример: неравенство $\sin n < \sin(n+1)$ абсолютно справедливо при $n = 1$:

$$\sin 1 \approx 0.814 < 0.909 \approx \sin 2,$$

однако при том же самом $n = 1$ неравенство $\sin(n+1) < \sin(n+2)$ не имеет с действительностью ничего общего, ибо

$$\sin 2 \approx 0.909, \quad \sin 3 \approx 0.141.$$

[3] Студенты первого курса снова образуют исключение. Специально для них — да будет известно: *про любое число можно сказать, что* $a \leqslant a$.

Второй студенческой ошибкой является путаница в голове: студент берёт формулу $P(n+1)$ и пытается вывести из неё $P(n)$. Если это вдруг удаётся, то соответствующий вывод радостно объявляется решением: как же, взяли нечто и вывели из него справедливую по предположению индукции $P(n)$ — значит, всё правильно!

Эта ошибка настолько дремуча, что даже не имеет ничего общего с математикой. В данном случае она лежит в сфере логики: студент путает посылку со следствием, и к тому же попадает в сети классической ловушки «из лжи можно вывести всё что угодно». Когда же студенту указывают на это, он возражает: а вот в задаче **№ 10.1(в)** (или аналогичной) мы тоже начинали с $P(n+1)$ — почему там было можно, а тут нельзя?!

Да потому что, начиная с выражения $P_L(n+1) = |\sin\sum_{k=1}^{n+1} x_k|$, мы совершенно не обращали внимания на $P_R(n+1)$ и не делали никаких предположений о справедливости $P(n+1)$ — ни явных, ни неявных! И формула (6) справедлива *безусловно*, так как следует из безусловно справедливых неравенства треугольника, синуса суммы и ограниченности синуса с косинусом.

Заканчивая с методом математической индукции, разберём ещё *неравенство Бернулли* (задача **№ 6**): если все числа $x_1, x_2, \ldots$ имеют одинаковый знак и при этом больше, чем (-1), то

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \tag{7}$$

При $n = 1$ имеем тривиальное $1 + x_1 \geqslant 1 + x_1$. Попробуем теперь получить из предположения индукции (7) неравенство

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)\cdot(1+x_{n+1}) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}. \tag{8}$$

Для этого домножим (7) на $(1+x_{n+1})$. Тот факт, что $x_k > -1$, гарантирует строгую положительность множителя и сохраняет знак неравенства. Получим:

$$\underbrace{(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)\cdot(1+x_{n+1})}_{P_L(n+1)} \geqslant (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(1+x_{n+1}).$$

Раскрываем правую часть:

$$(1 + x_1 + \ldots + x_n)(1+x_{n+1}) = \underbrace{1 + x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}}_{P_R(n+1)} + \underbrace{x_1x_{n+1} + \ldots + x_nx_{n+1}}_{\geqslant 0}.$$

Здесь все x_k имеют одинаковый знак и, значит, их попарные произведения неотрицательны. Отбрасывая их, мы только уменьшим сумму, так что $P_L(n+1) \geqslant P_R(n+1)$.

Неравенством Бернулли называют также частный случай (7), получающийся при $x = x_1 = \ldots = x_n > -1$:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \quad x > -1. \tag{9}$$

Кстати сказать, это неравенство составляет задачу **№ 7**. Доказать его можно и само по себе, не выводя из результата предыдущей задачи (рекомендуется проделать это самостоятельно). Рекомендуется также решить самостоятельно задачу **№ 10.1(г)** и попробовать найти ошибку в *индукции Пойа* (см. § 14).

Отличный обзор метода математической индукции можно найти в [2] гл. 1, § 1.1.

Перейдём теперь к рассмотрению одного полезного приёма, который позволяет упрощать и сворачивать суммы, получая гораздо более удобные для выкладок выражения.

Пусть имеется некоторая сумма

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n. \qquad (10)$$

Предположим, что нам удалось найти такое выражение X_k, для которого справедливо представление

$$X_k - X_{k-1} = x_k.$$

Если это так, то становится нетрудно вычислить сумму (10):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \underbrace{X_1 - X_0}_{x_1} + \underbrace{X_2 - X_1}_{x_2} + \ldots + \underbrace{X_{n-1} - X_{n-2}}_{x_{n-1}} + \underbrace{X_n - X_{n-1}}_{x_n}.$$

Видно, что все слагаемые, кроме двух, сокращаются[4], и остаётся

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = X_n - X_0, \quad \text{если } X_k - X_{k-1} = x_k. \qquad (11)$$

Эта формула является дискретным аналогом формулы Ньютона–Лейбница, и как в формуле Ньютона–Лейбница, величины X_k можно определять с точностью до постоянного слагаемого (всё равно оно сократится при вычитании).

Вопросом о том, в каком именно виде искать X_k, занимается теория разностных уравнений (исчисление конечных разностей[5]); в общем случае это может быть весьма трудной задачей. Нам достаточно будет простого правила: *если x_k является полиномом, то X_k нужно искать в виде полинома степени на единицу больше.* Свободный коэффициент полинома можно отбросить.

Покажем, как этим способом выводится уже рассмотренная формула (2). В ней $x_k = k^2$, поэтому X_k ищем в виде кубического полинома:

$$\begin{aligned} X_k &= Ak^3 + Bk^2 + Ck; \\ X_{k-1} &= A(k-1)^3 + B(k-1)^2 + C(k-1) = \\ &= Ak^3 + (-3A + B)k^2 + (3A - 2B + C)k + (-A + B - C); \end{aligned}$$

Вычитая из одного другое, получаем

$$X_k - X_{k-1} = 3Ak^2 + (-3A + 2B)k + (A - B + C) = k^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, приходим к системе

$$\begin{cases} 3A & & & = 1 \\ -3A & + \ 2B & & = 0 \\ A & - \ B & + \ C & = 0 \end{cases} \qquad A = \tfrac{1}{3},\ B = \tfrac{1}{2},\ C = \tfrac{1}{6}.$$

Итак, $X_k = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k = \frac{1}{6}k(2k^2 + 3k + 1) = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = X_n - \cancelto{0}{X_0} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[4]Такие суммы иногда называются «телескопическими».

[5]Замечательное введение в эту теорию содержится в [2], гл. 2, § 2.6.

В качестве упражнения можно предложить так называемую *задачу аль-Ка́ши*: найти сумму четвёртых степеней $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.

Подобным же образом упрощается последовательность

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

в задаче **№ 56** (она же **№ 2549**). Если заметить, что

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

то в сумме сократятся все слагаемые, кроме двух:

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Вообще, при работе с суммами дробей часто оказывается полезным разложить дроби на элементарные. В качестве примера хорошо подходит задача **№ 2987**[6]:

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{A(k+1)(k+2) + Bk(k+2) + Ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}.$$

Приравниваем числители:

$$A(k+1)(k+2) + Bk(k+2) + Ck(k+1) = 1 \;\Rightarrow\; A = C = \frac{1}{2},\; B = -1.$$

И снова в сумме x_n сокращаются почти все слагаемые:

$$x_n = \frac{1/2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1/2}{4} + \ldots + \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Конечно, описанный метод свёртки сумм не является единственным. Интересующихся можно отослать к [2] — значительная часть книги посвящена именно этому вопросу, а в гл. 2, § 2.5 показаны ещё несколько способов вывода формулы (2).

2. Определение предела

Когда речь заходит о понятии предела, трудно назвать фамилию, которая в этой связи упоминалась бы так же часто, как фамилия Коши. Посмотрим, как он сам определял предел в [6] (1821 год):

> *Если последовательные значения одной и той же переменной неограниченно приближаются к некоторой постоянной величине, так что разность между ними и этой постоянной величиной может сделаться менее всякой данной величины, то постоянная величина называется* предел *переменной.*

[6] Там речь идёт о сумме ряда, но она, как известно, вычисляется через предел последовательности частичных сумм.

Запишем теперь определение предела последовательности из любого современного учебника:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N: \quad |x_n - x| < \varepsilon \tag{12}$$

и попробуем сопоставить его с определением Коши:

> Если последовательные значения одной и той же переменной (x_n) неограниченно приближаются к некоторой постоянной величине (x), так что разность между ними и этой постоянной величиной ($|x_n - x|$) может сделаться менее всякой данной величины ($\forall\varepsilon > 0 \ \ldots \ |x_n - x| < \varepsilon$), то постоянная величина (x) называется пределом переменной (x_n).

Вставка “$\exists N \ \forall n \geqslant N$” в (12) означает, что разность $|x_n - x|$ «делается менее всякой данной величины», лишь начиная с некоторого номера.

Теперь сформулируем определение (12) в более универсальном виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N: \quad x_n \in S_\varepsilon(x), \tag{13}$$

где $S_\varepsilon(x)$ — это ε-окрестность точки x, определяемая как множество всех точек, отстоящих от x менее чем на ε:

$$S_\varepsilon(x) = \{y: \ |x - y| < \varepsilon\}.$$

Формулировка (13) хороша тем, что очень легко интерпретируется словами. Вот эта интерпретация:

> *Число x называется пределом последовательности x_n, если в любой его окрестности лежат все элементы последовательности за исключением конечного их числа.*

Здесь необходимо сразу отметить очень распространённую студенческую ошибку при толковании этой интерпретации. Практически всегда находятся студенты, которые пытаются подменить слова «все элементы последовательности за исключением конечного их числа»[7] словами «бесконечно много элементов последовательности».

Делать так ни в коем случае нельзя — разница принципиальнейшая! Разберём её на примере последовательности

$$x_n = n^{(-1)^n}$$

из задачи **№ 44**. Её элементы принимают значения

$$\tfrac{1}{1}, 2, \tfrac{1}{3}, 4, \tfrac{1}{5}, 6, \ldots \ \Rightarrow \ x_{2k-1} = \tfrac{1}{2k-1}; \ x_{2k} = 2k.$$

Так вот, в любой ε-окрестности нуля лежит бесконечно много элементов этой последовательности (а именно, все элементы с нечётными номерами, бóльшими $1/\varepsilon$), однако ноль не является пределом этой последовательности!

Первое утверждение достаточно очевидно; второе следует из того, что

$$\exists\varepsilon = 1 \quad \forall N \quad \exists n = 2\lceil N\rceil > N: \quad |x_n - 0| = 2\lceil N\rceil > 1 = \varepsilon,$$

[7]Как синоним слов «все элементы, кроме конечного числа», часто употребляется словосочетание «*почти все элементы*».

а это в точности совпадает с отрицанием определения (12). Приведём это отрицание в общем виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq x \iff \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n \geqslant N: \quad |x_n - x| \geqslant \varepsilon. \tag{14}$$

Разобранный пример плавно подводит нас к вопросу: а как вообще пользоваться определениями типа (12)–(13) или их отрицаниями типа (14)?

Ответ: нужно для всех переменных, стоящих при кванторах существования “$\exists$”, указать способ их нахождения, который обеспечивал бы выполнение главного условия. При решении обычно с главного условия и начинают.

Рассмотрим подробнее это правило. В задаче **№ 42(в)** просят показать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n!}$ является бесконечно малой, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N: \quad \tfrac{1}{n!} < \varepsilon.$$

Начнём с главного неравенства (по очевидным причинам мы опустили в нём модуль).

$$\frac{1}{n!} < \varepsilon \iff n! > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Установить точно, когда именно $n!$ начинает превосходить $\frac{1}{\varepsilon}$, в общем виде практически невозможно. Мы лишь заметим[8], что $n! \geqslant n$ и поэтому

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n! > \frac{1}{\varepsilon},$$

а значит, можно положить $N = \frac{1}{\varepsilon}$, ибо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \tfrac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geqslant N: \quad \tfrac{1}{n!} \leqslant \tfrac{1}{n} < \varepsilon.$$

По этому примеру можно сделать два важных замечания: во-первых, выполнение главного неравенства (в рассмотренной задаче это было неравенство $\frac{1}{n!} < \varepsilon$) достаточно обеспечить «с запасом»; во-вторых, число N совершенно не обязательно должно быть целым — а если это так уж необходимо по требованию преподавателя или автора задачника, его всегда можно округлить в бóльшую сторону, взяв $\lceil N \rceil$ вместо N.

Заметим ещё, что в этой задаче мы на самом деле доказали бесконечную малость последовательности $\frac{1}{n}$ и неявно воспользовались «теоремой о двух милиционерах»:

$$0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0.$$

Покажем, что любая последовательность, сходящаяся к конечному пределу, является ограниченной (задача **№ 93**). Для этого предположим, что $x_n \to x < \infty$.

Выберем произвольно положительное ε, например, $\varepsilon = 1$. По определению предела зададимся соответствующим N, таким, что

$$\forall n > N: \quad x_n \in S_1(x).$$

Тогда все элементы последовательности с номерами, бóльшими N, принадлежат отрезку $[x-1, x+1]$. Левее точки $x - 1$ лежат лишь некоторые (а возможно, что и ни один) из элементов $x_1, \ldots, x_N$. Аналогично, правее точки $x + 1$ лежат лишь некоторые (а возможно, что и ни один) из элементов $x_1, \ldots, x_N$ (см. рис. 1).

[8] На том основании, что $n! = n \cdot (n-1)!$, где $(n-1)! \geqslant 1$.

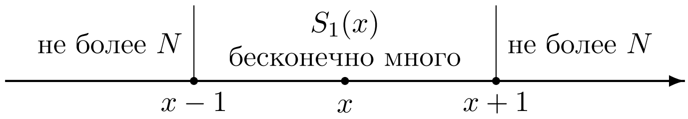

Рис. 1: к задаче № 93.

Рассмотрим множества

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{x_1, \ldots, x_N, x-1\}\\
A_2 &= \{x_1, \ldots, x_N, x+1\}.
\end{aligned}
$$

Они конечны, а следовательно, в каждом из них существуют максимальный и минимальный элементы. Положим

$$c = \min A_1 \quad \text{и} \quad C = \max A_2.$$

Тогда можно записать, что

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad c \leqslant x_n \leqslant C,$$

а это и означает ограниченность последовательности x_n.

Для полноты картины приведём также определения бесконечно больших последовательностей (это ответы на вопросы задачи **№ 45(а,б,в)**):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \quad \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N: \quad |x_n| > \varepsilon; \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N: \quad x_n > \varepsilon; \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N: \quad -x_n > \varepsilon. \tag{17}$$

Теперь мы можем показать, что последовательность из задачи **№ 44** *не является* бесконечно большой, ибо

$$\exists \varepsilon = 1 \quad \forall N \quad \exists n = 2\lceil N \rceil + 1: \quad |x_n| = \tfrac{1}{2\lceil N \rceil + 1} \leqslant 1 = \varepsilon,$$

а это совпадает с отрицанием (15).

Кстати, определения (15)–(17) легко получаются из определения (13), если ввести понятие ε-окрестности для бесконечности следующим образом:

$$
\begin{aligned}
S_\varepsilon(\infty) \quad &= \{x: \ |x| > \varepsilon\};\\
S_\varepsilon(+\infty) &= \{x: \ x > \varepsilon\};\\
S_\varepsilon(-\infty) &= \{x: \ x < -\varepsilon\}.
\end{aligned}
$$

Наконец, нужно сказать ещё следующее: из последовательности можно выбросить — или добавить в неё — или заменить в ней — любое *конечное* число элементов, и ни характер её сходимости, ни её предел никак не изменятся. Отсюда, в частности, вытекает, что если последовательность x_n сходится, то при $p \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+p} = \lim_{n\to\infty} x_n, \tag{18}$$

ибо последовательность x_{n+p} — это та же последовательность x_n, из которой выброшены первые p элементов. Аналогично, если полагать $n > p$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_{n-p} = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{19}$$

Этот случай можно рассматривать как добавление в начало последовательности p любых элементов.

Отсюда же следует, что последовательность, в которой все элементы, за исключением конечного их числа, — *почти все* элементы, — совпадают, сходится к этой общей для них константе.

В таблице 1 приведены несколько известных бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей, которые нужно помнить. Их стремление к бесконечности и к нулю достаточно легко показывается по определению[9] (что рекомендуется проделать самостоятельно!). Заметим ещё к этой таблице, что пределом последовательности q^n при $q = 1$ является единица, а при $q = -1$ эта последовательность вовсе не сходится.

Бесконечно малые	Бесконечно большие
—	$n!$ и $\sqrt[n]{n!}$
$q^n, \quad \lvert q\rvert < 1$	$q^n, \quad \lvert q\rvert > 1$
$n^a, \quad a < 0$	$n^a, \quad a > 0$
$n^{an}, \quad a < 0$	$n^{an}, \quad a > 0$
—	$\log n, \quad \ln n, \quad \log_a n, \quad 0 < a \neq 1$

Таблица 1: бесконечно большие и бесконечно малые.

Определение предела может быть применено к выводу неравенств. Пусть имеются последовательности x_n и y_n, причём предел их отношения существует и равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Обратимся к определению предела. Возьмём $\varepsilon = 1$ и найдём соответствующее ему число N. Для всех элементов последовательности с бо́льшими номерами будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \varepsilon = 1 \ \Rightarrow\ |x_n| < |y_n|.$$

Итак, если отношение $\frac{x_n}{y_n}$ есть бесконечно малая, то начиная с некоторого номера, $|x_n| < |y_n|$. Таким способом можно решить задачу **№ 67(a)**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100n + 200}{0.01n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{10000n + 20000}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10000}{n} + \frac{20000}{n^2}\right) = 0,$$

а значит, начиная с некоторого номера (возможно, достаточно большого), числитель становится меньше знаменателя.

[9]Исключением является последовательность $\sqrt[n]{n!}$, которую мы рассмотрим в § 4.

Наконец, продемонстрируем способ доказательства по определению того факта, что последовательность расходится. Формально утверждение «x_n расходится» означает выполнение двух условий:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty \\ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x \end{cases}.$$

В качестве примера рассмотрим последовательность $x_n = \sin n$, расходимость которой понятна на интуитивном уровне, однако доказывается не самым тривиальным образом.

Заметим прежде всего, что эта последовательность не может быть бесконечно большой из-за своей ограниченности: $|\sin n| \leqslant 1$.

Далее покажем, что она не может быть и бесконечно малой. Для этого вспомним, что $\sin x \geqslant 0$ при $2\pi k \leqslant x \leqslant \pi(2k+1)$ и, кроме того, $\sin \pi(2k+\frac{1}{2}) = 1$. На отрезке $[\pi(2k+\frac{1}{2}), \pi(2k+1)]$ длиной $\frac{\pi}{2} > 1$ синус монотонно убывает, так что

$$1 = \sin \pi(2k+\tfrac{1}{2}) > \sin\lceil \pi(2k+\tfrac{1}{2})\rceil > \sin\Big(\pi(2k+\tfrac{1}{2})+1\Big) \approx 0.54, \tag{20}$$

ибо, согласно (1), $\pi(2k+\frac{1}{2}) < \lceil \pi(2k+\frac{1}{2})\rceil < \pi(2k+\frac{1}{2})+1$ (рис. 2).

Итак, взяв за ε какое-либо положительное число, меньшее 0.54 (например, $\varepsilon = 0.1$), мы можем записать

$$\exists \varepsilon = 0.1 \quad \forall N \quad \exists n = \lceil \pi(2N+\tfrac{1}{2})\rceil \ : \quad 0.54 < x_n = \sin n \notin S_\varepsilon(0),$$

а это как раз и означает, что $\lim_{n\to\infty} \sin n \neq 0$.

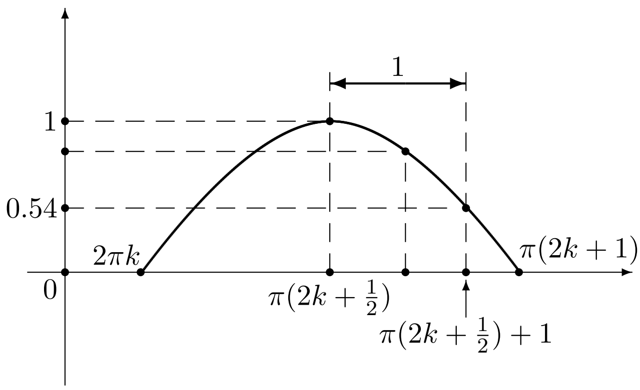

Рис. 2: к расходимости последовательности $\sin n$.

Из этих же рассуждений следует, что пределом последовательности не может быть ни одно *отрицательное* число, ведь у всякого отрицательного числа имеется окрестность, не содержащая положительных чисел, а мы только что указали способ нахождения положительных элементов последовательности со сколь угодно большими номерами.

Доказательство того, что последовательность не может иметь *положительного* предела, строится таким же образом, на основании неравенства типа (20). Единственное отличие заключается в том, что вместо точки $\pi(2k+\frac{1}{2})$, где синус достигает единицы, нужно рассматривать точку $\pi(2k+\frac{3}{2})$, синус которой равен (-1).

Эту схему можно применить и к последовательностям $\cos n$, $\operatorname{tg} n$, $\operatorname{ctg} n$, которые также расходятся. Однако чаще вместо отрицания определения предела оказывается более удобным отрицание критерия Коши, который мы будем рассматривать в § 5.

3. Неопределённости в голове и на бумаге

Начнём этот параграф со следующей небольшой, но интересной задачи. Требуется доказать сходимость и найти предел последовательности

$$x_n = \frac{n}{\sin n} \quad \text{(правильный ответ: } x_n \to \infty). \tag{21}$$

Интересна она тем, что стабильно ввергает студентов в глубокие раздумья, хотя решение проще простого. Почти всегда находится студент, который говорит правильный ответ, но обосновать его не может ни в какую.

Между тем, все обоснования совершенно примитивны. Вот они: обратная к x_n последовательность

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\sin n}{n}$$

является произведением ограниченной ($\sin n$) на бесконечно малую ($\frac{1}{n}$) — а стало быть, сама бесконечно мала. Естественно тогда, что последовательность x_n бесконечно велика.

После раскрытия этого секрета неизменно слышится студенческое «блиин!!!», и далее сама собой напрашивается небольшая провокация:

> Давайте подумаем: если произведение ограниченной на бесконечно малую есть бесконечно малая, то верно ли, что произведение ограниченной на бесконечно большую есть бесконечно большая?

Язык работает быстрее головы и отвечает «да!». К сожалению, такой ответ напрочь разбивается простейшим контрпримером:

$$\tfrac{1}{n^2} \text{ ограничена,} \quad n \text{ бесконечно большая,} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{n^2} \cdot n\right) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0.$$

Ошибка происходит из-за того, что студенты забывают: ограниченной последовательностью запросто может оказаться бесконечно малая, а произведение бесконечно малой на бесконечно большую ($0 \cdot \infty$) есть *неопределённость*. Правильное же утверждение звучит так:

> Произведение *ограниченной снизу по модулю* ($\exists C > 0 : \ |x_n| \geqslant C$) последовательности на бесконечно большую является бесконечно большой.

Теперь уже нетрудно увидеть другое объяснение для задачи в начале этого параграфа: так как $|\sin n| \leqslant 1$, то $|\frac{1}{\sin n}| \geqslant 1$ — эта последовательность ограничена снизу, а n есть бесконечно большая.

Приведём ещё несколько *правильных* утверждений, обращая в них особое внимание на слова, выделенные курсивом:

- сумма и разность *конечного числа* бесконечно малых есть бесконечно малая;
- произведение *конечного числа* бесконечно малых есть бесконечно малая, а бесконечно больших — бесконечно большая;
- сумма *конечного числа* бесконечно больших *одного знака* есть бесконечно большая того же знака;
- сумма бесконечно большой и *конечного числа* ограниченных (тем более — бесконечно малых) есть бесконечно большая;

- последовательность, обратная к бесконечно большой, является бесконечно малой, а обратная к бесконечно малой — является бесконечно большой;

- любая *фиксированная неотрицательная* степень бесконечно малой есть бесконечно малая, а бесконечно большой — бесконечно большая.

- последовательность, являющаяся *фиксированной* степенью другой последовательности, стремящейся к единице, сама стремится к единице.

Из этих фактов у студентов наибольшее недоверие вызывает утверждение о произведении бесконечно малых. Часто можно слышать вопрос: «если произведение *конечного* числа бесконечно малых есть бесконечно малая, то разве не будет произведение *бесконечного* числа бесконечно малых тем более бесконечно мало?»

Правильный ответ: в общем случае не будет! Несмотря на кажущуюся парадоксальность, в этом легко убедиться на следующем примере.

Рассмотрим бесконечную матрицу следующего вида:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ 1 & 1 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 24 & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

каждая k-ая строка которой образует числовую последовательность

$$x_{k,\cdot} = \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1}, k!, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots \qquad (22)$$

При любом фиксированном k последовательность (22) является бесконечно малой (в чём легко убедиться, выбросив из неё один-единственный элемент $k!$). Однако при этом в каждом n-ом столбце матрицы $\mathbf{X}$ перемножение всех коэффициентов даёт единицу:

$$x_n = \prod_{k=1}^{\infty} x_{k,n} = 1,$$

так что произведение бесконечного числа бесконечно малых последовательностей вида (22) приводит к последовательности, не являющейся бесконечно малой.

Рекомендуется самостоятельно построить аналогичный пример для суммы бесконечного числа бесконечно малых последовательностей.

Теперь приведём таблицу неопределённостей (табл. 2) с иллюстрирующими их примерами. На каждую неопределенность приводится два примера последовательностей, сходящихся к разным пределам (можно построить и примеры, где сходимости не будет вовсе). Таблица эта, кстати, содержит ответ на вопрос задачи **№ 129**.

К вопросу о пределе очень интересной последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

упомянутой в таблице и представляющей собой неопределённость вида 1^∞ (это так называемый *замечательный предел*) мы ещё вернёмся впоследствии в § 6.

$0 \cdot \infty$	$\frac{1}{n} \cdot n \to 1$	$\frac{1}{n^2} \cdot n \to 0$
$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{n} : \frac{1}{n} \to 1$	$\frac{1}{n^2} : \frac{1}{n} \to 0$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{2n^2}{n} \to \infty$	$\frac{n}{2n} \to \frac{1}{2}$
$\infty \pm \infty$	$(-n) + (n+1) \to 1$	$n + n \to \infty$
1^∞	$(1 + \frac{1}{n})^n \to e$	$1^n \to 1$
0^∞	$(\frac{1}{n})^n \to 0$	$(\frac{1}{n})^{-n} \to +\infty$

Таблица 2: неопределённости.

В заключение этого параграфа необходимо предостеречь от очень частой ошибки. Сплошь и рядом в студенческих работах приходится видеть формулы типа

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = \cancelto{0}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sin n = 0.$$

Писать так нельзя ни в коем случае, ибо предел в левой части равен нулю, а в правой части один из пределов вообще не существует! Причина ошибки в том, что студенты часто забывают: равенство

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

и ему подобные формулы справедливы лишь в том случае, если существуют все пределы *в правой части*. Их следует воспринимать *справа налево*.

Недопонимание этого факта может привести к серьёзным казусам. В качестве упражнения рекомендуется самостоятельно построить пример двух неограниченных последовательностей, произведение которых является бесконечно малой.

4. Факториал и два милиционера

Для начала — простой вопрос: чему равен факториал нуля? Мнения первокурсников всегда разделяются: половина утверждает, что тоже нулю, половина настаивает на единице.

Правильный ответ, разумеется — единица. Однако даже те, кто его дал, обычно затрудняются объяснить. Между тем, всё просто: нужно взять обычную формулу

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n$$

и применить её «наоборот», выразив из неё $(n-1)!$ следующим образом:

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}.$$

Если теперь положить в этой формуле $n = 1$, то получится искомое: $0! = \frac{1!}{1} = 1$. (Почти всегда находятся студенты, пытающиеся таким же манером распространить факториал на отрицательные числа и получающие при этом деление на ноль.)

Речь, как нетрудно догадаться, пойдёт о факториале, а точнее, о связанных с ним неравенствах. В школе такие неравенства не рассматриваются и при попытке воспользоваться «теоремой о двух милиционерах» для последовательности с факториалами студент нередко теряется.

Одно очевидное неравенство $n! \geqslant n$ уже упоминалось. На самом деле, можно записать целую цепочку:

$$n! \geqslant 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \geqslant 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n \geqslant (n-2)(n-1)n \geqslant (n-1)n \geqslant n,$$

причём каждое из них начинает выполняться с номера, равного числу взятых сомножителей.

Нетрудно получить и неравенство $n! \leqslant n^n$. Действительно, как $n!$, так и n^n состоят из n сомножителей, но в n^n каждый из них равен n, а в $n!$ — только один, тогда как все остальные меньше.

Гораздо менее очевидно неравенство $n! \geqslant 2^n$. Его нетрудно показать по индукции (кстати, рекомендуется сделать это), но существует и более наглядный способ. Составим диаграмму, изображённую на рис. 3.

$$\begin{tikzcd}
n! = & 1 \arrow[d] & 2 & 3 & 4 \arrow[lll, bend right, "4=2\cdot2"'] \arrow[d] & 5 & \cdots & n \\
 & 1 \cdot 2 & & & 2 & & & \\
2^n = & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2
\end{tikzcd}$$

Рис. 3: к неравенству $n! \geqslant 2^n$.

Вверху выписаны сомножители для $n!$, внизу — сомножители для 2^n. Видно, что почти все сомножители верхней строки больше либо равны сомножителям нижней. Исключение составляет единица, однако тот факт, что $4 = 2 \cdot 2$, исправляет положение. Итак, неравенство $n! \geqslant 2^n$ справедливо при $n \geqslant 4$.

Из диаграммы на рис. 4 видно, что точно по такому же принципу имеет место неравенство $n! \geqslant 3^n$ при $n \geqslant 9$ (на самом деле уже при $n \geqslant 7$, но показанный на диаграмме вариант более нагляден). Аналогично показывается, что $n! \geqslant 4^n$ при $n \geqslant 16$ и т.п. — вообще, начиная с некоторого n, справедливо $n! \geqslant k^n$, где $k = \mathrm{const}$ — любое *конечное* число.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & 2 \arrow[d] & 3 & 4 & 5 & 6 \arrow[llll, bend right, "6=2\cdot3"'] \arrow[d] & 7 & 8 & 9 \arrow[llllllll, bend right, "9=3\cdot3"'] \arrow[d] \\
1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & & & & 3 & & & 3 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3
\end{tikzcd}$$

Рис. 4: к неравенству $n! \geqslant 3^n$.

Ещё менее очевидно неравенство $n! \geqslant n^2$. Оно тоже без труда доказывается по индукции (рекомендуется попробовать), однако здесь хотелось бы рассмотреть более изящный способ.

Составим из n^2 и $n!$ последовательность

$$x_n = \frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} > 0$$

и исследуем вопрос о её монотонности. Для этого найдём отношение двух соседних элементов последовательности:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}.$$

Решая квадратичное неравенство $n^2 > n+1$, получаем $n \geqslant 3$. Итак, начиная с $n = 3$,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1, \text{ то есть } x_n > x_{n+1}.$$

Иными словами, последовательность убывает. Теперь заметим, что $x_4 = \frac{2}{3} < 1$ — значит, и все последующие x_n не превосходят единицы. Стало быть, числитель n^2 меньше знаменателя $n!$ и

$$n! \geqslant n^2, \quad n \geqslant 4.$$

Аналогично можно показать, что с некоторого номера $n! \geqslant n^3$, $n! \geqslant n^4$ и т.д. — вообще, справедливо неравенство

$$n! \geqslant n^k, \quad k = \mathrm{const} \in \mathbb{R}.$$

И кстати, раз уж речь зашла об этом приёме — таким же методом показывается, что $n^2 \leqslant 2^n$:

$$\frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{2n^2}{(n+1)^2} \geqslant 1 \text{ при } n \geqslant 3,$$

значит, последовательность $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ монотонно убывает, а уже при $n = 5$ имеем $x_5 = \frac{25}{32} < 1$. Вообще, справедливо неравенство

$$n^k \leqslant p^n, \quad k = \mathrm{const} \in \mathbb{R}, \quad p = \mathrm{const} > 1.$$

Выведенные неравенства можно объединить в таблицу 3, однако следует помнить, что *все они справедливы, лишь начиная с некоторого — возможно, весьма большого — номера*! Так, например, неравенство $n^{1.00001} \leqslant 1.00001^n$ начинает выполняться лишь с номера 1416382. Приведённая таблица, кстати, содержит ответы на вопросы, поставленные в задаче **№ 67(б,в)**.

Студенты часто интерпретируют такие неравенства в смысле «последовательность y_n возрастает быстрее, чем x_n». В принципе это правильно, но из этого сплошь и рядом делается неправильный вывод: «...а если так, то предел отношения $\frac{x_n}{y_n}$ равен нулю».

Показать, что это вовсе не так просто, можно на примере: пусть $x_n = n$, а $y_n = 2n$. Совершенно очевидно, что y_n возрастает быстрее x_n (ровно в два раза). Однако же предел их отношения равен отнюдь не нулю, а $\frac{1}{2}$.

Тему факториала и его возрастания закончим ещё одним интересным неравенством

$$n^{n/2} \leqslant n! \leqslant \frac{(n+1)^n}{2^n} \tag{23}$$

$n! \leqslant n^n$	*при всех* n
$n^k \leqslant k^n \leqslant n! \leqslant n^n$	$k = \mathrm{const} > 1$
$n^k \leqslant n!$ и $k^n \leqslant n!$	$k = \mathrm{const}$
$n^k \leqslant p^n$	$k = \mathrm{const}$, $p = \mathrm{const} > 1$
Начиная с некоторого номера!	

Таблица 3: некоторые неравенства.

(часть которого просят доказать в **№ 8**, хотя там это рекомендуется делать другим способом). Для его вывода рассмотрим выражение $(n!)^2$:

$$(n!)^2 = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)(n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1) = \big(1 \cdot n\big)\big(2 \cdot (n-1)\big) \ldots \big(n \cdot 1\big) = \\ = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k).$$

Далее заметим, что

$$k(n+1-k) = \underbrace{k(n+1) - k^2}_{f(k)} = \tfrac{1}{4}(n+1)^2 - \big(k - \tfrac{1}{2}(n+1)\big)^2.$$

Здесь $f(k)$ — это квадратичная функция, которая при $1 \leqslant k \leqslant n$ принимает наибольшее значение $\frac{1}{4}(n+1)^2$, если $k = \frac{1}{2}(n+1)$ и наименьшее значение n, если $k = 1 = n$, так что

$$n \leqslant k(n+1-k) \leqslant \tfrac{1}{4}(n+1)^2.$$

Если перемножить по k от 1 до n, то отсюда вытекает неравенство

$$n^n = \prod_{k=1}^{n} n \leqslant (n!)^2 \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^{2n}}{2^{2n}}.$$

Извлекая квадратный корень, получаем формулу (23).

Теперь мы можем доказать, что последовательность $\sqrt[n]{n!}$ является бесконечно большой. Действительно,

$$\sqrt[n]{n!} = (n!)^{1/n} \geqslant (n^{n/2})^{1/n} = n^{1/2} = \sqrt{n} \to \infty.$$

Этим мы решили задачу **№ 66**.

Наконец, сто́ит упомянуть так называемую формулу Стирлинга:

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n}.$$

Символ $\sim$ (не путать с $\approx$) здесь следует понимать в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{e^n}\right)} = 1.$$

Так, при $n = 20$ истинное значение $n!$ отличается от оценки по формуле Стирлинга примерно на 10^{16} (абсолютная погрешность), тогда как их отношение равно ≈ 1.0042 (относительная погрешность составляет $\approx 0.42\%$).

Вывод формулы Стирлинга требует использования аппарата степенных рядов и выходит за рамки первого семестра математического анализа[10], однако знать о её существовании полезно. В § 13 мы выведем близкое к ней более простое соотношение.

[10] Желающие могут найти этот вывод в [5] т. 2, гл. IV, § 37.8.

5. Снова Коши

Начинаем параграф с ещё одного вопроса «на засыпку». Его лучше задавать студентам, уже знакомым с понятием предела последовательности и более-менее успешно решившим несколько задач самостоятельно. Вот этот вопрос.

> Предположим, последовательность x_n такова, что разность между двумя соседними элементами бесконечно мала:
>
> $$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$
>
> Верно ли, что в этом случае последовательность x_n ограничена и сходится, хотя бы и не к нулю?

В ответ раздастся уверенное «да», причём в подтверждение своего мнения многие студенты сошлются на (18)–(19). Правильный ответ, разумеется, гласит «нет», а что касается упомянутых формул, то здесь студенты путают причину и следствие. На самом-то деле утверждение верно с точностью до наоборот: *если последовательность сходится, то разность между её соседними элементами бесконечно мала.*

Пример, иллюстрирующий эту ситуацию, сам по себе является для студентов камнем преткновения. Рассмотрим последовательность[11]

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{24}$$

которая неограниченно возрастает и стремится к бесконечности. Студенты верят в это с большим трудом, но тем не менее это так.

Для доказательства нам понадобится критерий Коши сходимости последовательности: *для того, чтобы последовательность x_n сходилась к конечному пределу, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию фундаментальности*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\forall n,m\geqslant N:\quad |x_n-x_m|<\varepsilon. \tag{25}$$

У этого условия есть и другая формулировка, более удобная для решения задач:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\quad\forall n\geqslant N\quad\forall p\in\mathbb{N}:\quad |x_n-x_{n+p}|<\varepsilon. \tag{26}$$

В данном случае мы доказываем, что последовательность *не сходится* к конечному пределу, так что построим отрицание условия Коши (тем самым попутно ответив на вопрос задачи **№ 87**):

$$\exists\varepsilon>0\quad\forall N\quad\exists n\geqslant N\quad\exists p\in\mathbb{N}:\quad |x_n-x_{n+p}|\geqslant\varepsilon. \tag{27}$$

Рассмотрим главное неравенство. В нашем случае

$$|x_n-x_{n+p}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p},$$

и нам нужно ограничить эту величину *снизу*. Возьмём наименьшее из всех слагаемых $\frac{1}{n+p}$ и умножим его на число слагаемых p:

$$|x_n-x_{n+p}|\geqslant\frac{p}{n+p}.$$

[11]В которой знакомые с рядами студенты без труда узнàют последовательность частичных сумм гармонического ряда.

Заметим теперь, что в условии (27) достаточно указать лишь какой-то *один* способ выбора n и p. Если положить $p = n$, то

$$|x_n - x_{n+p}| \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Окончательно записываем

$$\exists \varepsilon = \tfrac{1}{2} \quad \forall N \quad \exists n = \lceil N \rceil \quad \exists p = n = \lceil N \rceil : \quad |x_n - x_{n+p}| \geqslant \tfrac{1}{2} = \varepsilon,$$

то есть условие (27) выполняется и последовательность не сходится к конечному пределу. Поскольку она монотонно возрастает[12], отсюда можно заключить, что она стремится к бесконечности. Показав этот факт, мы решили задачи **№ 88** и **№ 2576**.

Теперь становится понятным, что утверждение в начале этого параграфа неверно, ведь разность соседних элементов последовательности является бесконечно малой:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

однако сама последовательность бесконечно велика. Кстати сказать, из рассмотренного примера следует, что бесконечно большой будет любая последовательность вида

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}, \quad p = \mathrm{const} \leqslant 1.$$

Для полноты картины рассмотрим пример, в котором критерий Коши используется в *позитивном* смысле, для доказательства сходимости, — пусть это будет задача **№ 84**. Заметим, что дело значительно осложняется: теперь в условии (26) номера n и p стоят при кванторах *всеобщности*. На практике, как правило, стараются избавиться от p.

Итак, дана последовательность

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

В соответствии с (26) нам нужно ограничить величину $|x_n - x_{n+p}|$ *сверху*:

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n+p}| &= \Big| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \Big| \leqslant \\ &\leqslant \Big| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} \Big| + \ldots + \Big| \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \Big| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}. \end{aligned}$$

Сворачивая сумму дробей в правой части согласно идеологии § 1, получаем[13]

$$|x_n - x_{n+p}| \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Здесь мы как раз избавились от p. Далее остаётся решить простейшее неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ и записать:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \tfrac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N} : \quad |x_n - x_{n+p}| < \tfrac{1}{n} = \varepsilon.$$

[12] Мы рассмотрим скорость возрастания этой последовательности в § 11.

[13] См. в § 1 ссылку на задачу **№ 56** (стр. 6).

Из задач на позитивное применение критерия Коши весьма нетривиальной является **№ 82**, которая всячески рекомендуется для самостоятельного решения.

Заканчивая тему «неравенств с кванторами», сто́ит упомянуть характерную студенческую ошибку, выглядящую буквально анекдотически. Из года в год неизменно находятся студенты, которые, видя неравенство типа (25), мысленно проговаривают его про себя: «для любого положительного ε...» и берут *любое* ε *наугад*, — например, $\varepsilon = 0.1$, — после чего показывают для него выполнение условия и считают задачу решённой!

Совершенно очевидно, что такие студенты доказали выполнение условия как раз для *некоторого*, вполне конкретного ε, и подобное доказательство ничего не стоит. После указания на эту ошибку некоторые ещё пытаются спорить («в теореме сказано “для любого”, я и взял(а) любое наугад — что неправильно-то?!»), вгоняя в смех как преподавателя, так и собственную группу. Рецепт здесь, пожалуй, только один: посоветовать мысленно проговаривать «для всех...» или «для всякого...» вместо «для любого...»

Наконец, нужно рассмотреть важный вопрос, в котором студенты часто путаются. Обратимся к условию фундаментальности (26) и зададимся вопросом: эквивалентно ли это условие более простому

$$\forall p \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - x_{n+p}| = 0, \tag{28}$$

в котором манипуляций с кванторами значительно меньше?

Студенческий ответ чаще всего гласит «да, эквивалентно». Разумеется, этот ответ неправилен. Убедиться в том, что условия (26) и (28) не эквивалентны, можно на примере всё той же последовательности (24). Для неё

$$|x_n - x_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}.$$

Ограничим эту сумму сверху, выбрав наибольшее (первое) из слагаемых и умножив его на число слагаемых (p):

$$|x_n - x_{n+p}| < \frac{p}{n+1}.$$

Видно теперь, что для последовательности (24)

$$\forall p \in \mathbb{N}: \quad 0 < |x_n - x_{n+p}| < \frac{p}{n+1} \to 0,$$

то есть условие (28) выполняется. Однако, как мы видели ранее, эта последовательность вовсе не является фундаментальной!

Чтобы понять разницу между (26) и (28), запишем эти условия одно под другим, «развернув» предел в (28):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N}: \quad |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon; \tag{26}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N: \quad |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon. \tag{28}$$

Из порядка следования кванторов видно, что в (28) для N подразумевается зависимость $N = N(p, \varepsilon)$, тогда как в (26) — всего лишь $N = N(\varepsilon)$. Поэтому условие (26) является более строгим; из его выполнения следует (28), но обратное неверно[14]. Рассмотренный сейчас вопрос очень близок к задаче **№ 2572**.

Из критерия Коши следует один важный факт: любая последовательность, образованная циклическим перечислением конечного числа различных констант, обязательно расходится. Доказать справедливость этого утверждения рекомендуется самостоятельно.

[14]Говорят ещё, что в (26) N зависит от ε равномерно по p, а в (28) — неравномерно.

6. Монотонность, ограниченность и экспонента

Теорема о том, что монотонная и ограниченная последовательность сходится к конечному пределу, хорошо понятна на интуитивном уровне и обычно не вызывает у студентов каких-либо вопросов — правда, студенты далеко не всегда в состоянии увидеть, что в данной конкретной задаче эта теорема применима.

Сама теорема нуждается только в двух замечаниях:

- вполне достаточно, если монотонность имеет место, *лишь начиная с некоторого номера* — совершенно не обязательно с первого;
- для монотонной *возрастающей* последовательности достаточно показать, что она ограничена *сверху*[15], а монотонно *убывающей* — что она ограничена *снизу*.

Начнём с рассмотрения задачи **№ 86**, в которой используется как теорема о сходимости монотонной и ограниченной последовательности, так и понятие фундаментальности. Нужно показать, что если последовательность x_n имеет *ограниченное изменение*, т.е.

$$\exists C > 0 \quad \forall n \geqslant 2: \quad \sum_{k=2}^{n} |x_k - x_{k-1}| \leqslant C,$$

то она сходится к конечному пределу.

По данной последовательности составим ещё одну последовательность X_n следующим образом:

$$X_n = \sum_{k=2}^{n} |x_k - x_{k-1}|, \quad n \geqslant 2.$$

Непосредственно из условия следует, что она будет ограничена сверху константой C. При этом она является монотонно возрастающей, так как

$$X_{n+1} - X_n = |x_{n+1} - x_n| \geqslant 0 \ \Rightarrow \ X_{n+1} \geqslant X_n.$$

Отсюда заключаем, что X_n сходится к некоторому конечному пределу, не превосходящему C. А если так, то она фундаментальна:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N}: \quad |X_{n+p} - X_n| \equiv X_{n+p} - X_n < \varepsilon.$$

Но тогда для исходной последовательности x_n получаем, что

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n| \leqslant \\ &\leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| = \\ &= X_{n+p} - X_n < \varepsilon. \end{aligned}$$

Иными словами, последовательность x_n тоже фундаментальна, а значит, сходится к конечному пределу.

Другим хорошим и простым примером является задача **№ 79**, где просят доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

[15] Доказательство того, что монотонно возрастающая (хотя бы с некоторого номера) последовательность будет *обязательно* ограничена снизу — очень хорошее упражнение. Также можно порекомендовать задачи **№ 94** и **№ 95**, утверждения которых доказываются весьма похоже.

Здесь каждый последующий элемент последовательности отличается от предыдущего домножением на $(1 - \frac{1}{2^k})$, так что

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1 \;\Rightarrow\; x_n > x_{n+1}$$

и последовательность является монотонно убывающей. Снизу же она ограничена, например, нулём: ведь каждый элемент x_n является произведением строго положительных сомножителей. Тем самым сходимость доказана.

Заметим важный факт: хотя последовательность строго монотонно убывает и ограничена снизу нулём, *это вовсе не значит, что она сходится именно к нулю*! (В действительности её предел приближённо равен 0.2888) Обсуждаемая теорема вообще никак не позволяет находить предел, она лишь устанавливает сам факт сходимости.

На основании этой теоремы доказывается существование так называемого *замечательного предела*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{29}$$

полученного Д. Бернулли в 1728 году (хотя символ «e» ввёл в математический обиход Л. Эйлер в 1736 году; он же показал, что такой предел справедлив и для непрерывного изменения аргумента). Рассмотрим две последовательности x_n и y_n, определённые следующим образом:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{30}$$

Исследуем монотонность x_n, найдя отношение её последующего элемента к предыдущему:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \Big/ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.\end{aligned}$$

Применим ко второму сомножителю неравенство (9), положив в нём $x = \frac{-1}{(n+1)^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &\geqslant \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^3} = \\ &= 1 + \frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1,$$

следовательно, $x_{n+1} > x_n$ и последовательность *строго монотонно возрастает, начиная с первого же элемента*. Поэтому $x_n > x_1 = 2$. Аналогичным образом показывается, что последовательность y_n *строго монотонно убывает* и $y_n < y_1 = 4$.

Далее заметим, что

$$y_n = (1 + \tfrac{1}{n})x_n, \tag{31}$$

поэтому $x_n < y_n$ и можно записать

$$2 \leqslant x_n < y_n \leqslant 4.$$

Так как эти последовательности монотонны и ограничены, то они обе сходятся (причём x_n сходится к своему пределу *снизу*, а y_n к своему — *сверху*). Из того же соотношения (31) следует, что они имеют некоторый *общий* предел, обозначаемый e: $e \approx 2.7183$, причем

$$2 \leqslant x_n < e < y_n \leqslant 4. \tag{32}$$

Все приведённые рассуждения являются решением задачи **№ 69**.

Важное значение имеет представление числа e в виде

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

полученное всё тем же Л. Эйлером и сейчас встречающееся практически в каждом учебнике математического анализа ([4], т. 1, гл. I, § 3, п. 37; [5], т. 1, гл. I, § 4.9).

На самом деле существует более общая форма замечательного предела (29):

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

в современном виде указанная опять-таки Л. Эйлером в [1] т. 1, гл. VII, § 125. Как ни странно, студенты помнят этот предел, но с большим трудом узнают его в выражении

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Докажем теперь одну важную формулу. Сопоставляя (30) и (32), прологарифмируем неравенство $x_n < e$:

$$n \ln(1 + \tfrac{1}{n}) < 1 \;\Rightarrow\; \ln(1 + \tfrac{1}{n}) < \tfrac{1}{n}.$$

Аналогично из неравенства $y_n > e$ получаем

$$(n+1) \ln(1 + \tfrac{1}{n}) > 1 \;\Rightarrow\; \ln(1 + \tfrac{1}{n}) > \tfrac{1}{n+1}.$$

Объединяя эти два результата, получаем неравенство[16] задачи **№ 75(а)**

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Если поделить неравенство (34) на $\frac{1}{n}$, получим

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} \leqslant 1.$$

Здесь $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$, так что по теореме «о двух милиционерах»

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} = 1 \;\Rightarrow\; \ln(1 + \tfrac{1}{n}) \sim \tfrac{1}{n}. \tag{35}$$

[16] Справедливо и более общее неравенство $\ln(1 + x) \leqslant x$ при $x > 0$.

Другое интересное неравенство получается из $x_n < e < y_n$. Вычитая отсюда x_n, приходим к $0 < e - x_n < y_n - x_n$. Тогда

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{=x_n<4} \frac{1}{n} < \frac{4}{n}.$$

Эта формула даёт оценку скорости сходимости последовательности x_n к своему пределу e. Фактически мы этим решили задачу **№ 70** с той лишь разницей, что там приводится чуть более точная оценка $\frac{3}{n}$ вместо $\frac{4}{n}$, несколько удлиняющая выкладки.

Рассмотрим ещё задачу **№ 80**, с виду похожую на **№ 79**, однако в действительности более сложную. Просят доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Её монотонность никаких сомнений не вызывает:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) x_n > x_n.$$

Сложнее дело обстоит с ограниченностью: так как последовательность возрастает, её нужно ограничивать *сверху*. Прологарифмируем x_n:

$$\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Заметим теперь, что если $k \in \mathbb{N}$, то и $2^k \in \mathbb{N}$, а значит, можно воспользоваться неравенством (34), из которого

$$\ln x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Если правую часть записать в двоичной системе исчисления, то

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots + \tfrac{1}{2^n} = (\mathrm{bin})\ 0.\underbrace{11\dots1}_{n} < 1,$$

поэтому $x_n < e^1 = e$. Итак, сходимость последовательности доказана.

7. Теорема Штольца и правило Лопиталя

Из года в год студенты-первокурсники пытаются раскрывать неопределённости вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ в последовательностях по правилу Лопиталя, стандартно натыкаясь на преподавательский запрет: дифференцировать последовательности нельзя! Запрет этот справедлив вдвойне: во-первых, производная есть отношение бесконечно малых, а аргумент $n \in \mathbb{N}$ элементов последовательности x_n изменяется очень даже дискретно; во-вторых, такие студенты на самом деле *не знают* правила Лопиталя — в курсе лекций его ещё не было, а усвоенное в школе вообще ниже всякой критики. В ответ на прямо поставленный вопрос «продвинутый» студент не может даже правильно сформулировать соответствующую теорему, не то что доказать её.

Обратимся вновь к примеру (21) из § 3. Однажды автор лично был свидетелем того, как студент уверенно заявил, что этот предел равен единице, а на просьбу обосновать —

не менее уверенно «обосновал», что это-де общеизвестный «замечательный предел» и в доказательство тут же «раскрыл неопределённость по Лопиталю». Даже то, что “$n \to \infty$” и “$x \to 0$” — это, мягко говоря, две большие разницы, его нисколько не смутило... в общем, со школьным образованием всё понятно.

Самое парадоксальное, что в теории последовательностей есть совершенный аналог правила Лопиталя, известный как теорема Штольца. На самом деле Штольц обобщил результат Коши, который нелишне привести здесь как он есть:

Если последовательность x_n такова, что существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(x_{n+1}-x_n\bigr),$$

то существует и предел последовательности $\frac{x_n}{n}$, причём они равны между собой:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\bigl(x_{n+1}-x_n\bigr).$$

Уже отсюда можно получить интересные результаты, например

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n, \tag{36}$$

при условии, что существует предел в правой части (задача **№ 138**)[17]. Теорема Штольца более универсальна и выглядит следующим образом:

Пусть последовательность y_n монотонно возрастает (хотя бы начиная с некоторого номера), причём $y_n \to +\infty$. Пусть x_n — некоторая последовательность, такая, что существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Тогда существует и предел последовательности $\frac{x_n}{y_n}$, причём

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Применение этой теоремы рассмотрим на примере задачи **№ 53**, где нужно найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}.$$

Вообще говоря, найти этот предел вполне можно и на основании формулы (2), справедливость которой была показана уже дважды. Однако теорема Штольца даёт более короткий способ. Положим

$$x_n=1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2 \quad \text{и} \quad y_n=n^3$$

(подобный выбор y_n удовлетворяет условиям теоремы). Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^3-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{3}.$$

[17] Этот результат (сходимость средних арифметических) можно получить и без привлечения результатов Коши–Штольца, хотя рассуждения значительно усложняются. См., например, [5], т. 1, гл. I, § 4, п. 4.1.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Точно так же устанавливается и более общий результат задачи **№ 145(а)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для преобразования знаменателя здесь необходимо воспользоваться формулой бинома Ньютона.

Поясним теперь, почему теорема Штольца есть аналог правила Лопиталя. Для этого определим над последовательностями оператор «крышка» ($\hat{x}_n$) следующим образом:

$$\hat{x}_n \equiv \hat{x}(n) = \frac{x(n+1) - x(n)}{(n+1) - n}.$$

Видно, что эта формула очень даже похожа на производную функции (хотя знаменатель в ней на самом деле равен единице). Тогда формула Штольца может быть записана в виде

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}(n)}{\hat{y}(n)},$$

вполне соответствующем правилу Лопиталя.

Остаток этого параграфа, набранный мелким шрифтом, во избежание путаницы в голове, предназначен только для студентов, знакомых с пределом функции хотя бы теоретически по курсу лекций.

Самая смешная часть правды заключается в том, что применять правило Лопиталя для последовательностей всё же *можно* — дело лишь в том, что такие вещи нужно уметь обосновывать. Для этого, правда, надо как следует понимать теорию предела функции.

Рассмотрим сие утверждение на примере последовательности из задачи **№ 58**:

$$f_n = \frac{n}{2^n}. \tag{37}$$

Вместо неё исследуем функцию непрерывного аргумента $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x}{2^x}, \quad \text{такую что} \quad f(n) \equiv f_n.$$

Предположим, что у неё существует конечный предел C при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = C. \tag{38}$$

Тогда, в силу определения предела функции по Гейне, для любой последовательности $t_n \to +\infty$ будет справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = C.$$

Выберем $t_n = n$, тогда $f(t_n) = f(n) \equiv f_n$ и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = C.$$

Осталось решить вопрос о существовании предела (38). Здесь, поскольку мы перешли от предела *последовательности* к пределу *функции*, правило Лопиталя уже применимо! Получаем

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = 0.$$

Итак, $C = 0$ и $f_n \to 0$.

А теперь заметим, что по теореме Штольца тот же самый результат получается не в пример быстрее:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{2^{n+1} - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Мораль: не следует чересчур переусложнять решение!

8. Рекуррентные зависимости

Не удовлетворяясь простым и понятным решением по Штольцу, снова возвращаемся к многострадальной задаче **№ 58**, где нужно найти предел последовательности (37). Пусть этот искомый предел равен C:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = C.$$

Попробуем теперь связать последующие элементы последовательности с предыдущими:

$$f_{n+1} = \frac{n+1}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left(f_n+\frac{1}{2^n}\right).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n\to\infty$, на основании (18) приходим к уравнению $C=\frac{1}{2}(C+0)$, которое имеет решение $C=0$. Итак, вроде бы мы нашли правильный ответ, попутно изобретя новый способ вычисления пределов!

На деле не всё оказывается так просто. Рассмотрим ещё одну последовательность:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1+2+\ldots+2^{n-1}.$$

Удвоив это выражение, обнаруживаем зависимость

$$2x_n = 2+4+\ldots+2^n = x_{n+1}-1.$$

Используя ту же идеологию, получаем для предела C уравнение $2C=C-1$, откуда совершенно неожиданно обнаруживаем, что... $C=-1$. И это у последовательности, каждый элемент которой положителен! Что-то в этом примере явно некорректно[18].

Ответ, разумеется, очень прост. Вот всё объяснение: последовательность x_n *не имеет конечного предела* C, в чём каждый может убедиться, свернув сумму первых n членов геометрической прогрессии. Тогда как последовательность (37) вполне себе сходится к конечному числу — это проверяется её монотонностью и ограниченностью (рекомендуется убедиться самостоятельно).

Помня об этой коварной особенности, попробуем *правильно* найти предел последовательности, заданной рекуррентным соотношением

$$x_1=\sqrt{2}\,;\quad x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}.$$

Убедимся сначала в том, что она вообще сходится, а для этого покажем монотонность и ограниченность.

Начнём с ограниченности, это проще. Можно показать по индукции, что $x_n<2$. Действительно, $x_1=\sqrt{2}<2$, а если $x_k<2$, то $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$. Снизу же последовательность ограничена нулём.

Покажем теперь, что последовательность монотонно возрастает: $x_n<x_{n+1}$. Действуем снова по индукции. Тот факт, что $x_1<x_2$, легко проверяется с помощью калькулятора: $x_1\approx 1.41<1.85\approx x_2$. Предположим теперь, что $x_k<x_{k+1}$. Тогда

$$x_{k+2}-x_{k+1}=\sqrt{2+x_{k+1}}-\sqrt{2+x_k}=\frac{x_{k+1}-x_k}{\sqrt{2+x_{k+1}}+\sqrt{2+x_k}}.$$

[18] В [2], откуда я взял этот пример, не без ехидства замечено (гл. 2, § 2.7), что ежели бы существовал компьютер с бесконечной разрядностью, то вот для него-то этот результат был бы вполне корректен.

Здесь мы домножили и разделили выражение на $\sqrt{2+x_{k+1}}+\sqrt{2+x_k}$. В силу предположения индукции результат положителен, так что

$$x_k < x_{k+1} \;\Rightarrow\; x_{k+1} < x_{k+2}$$

и монотонность последовательности доказана. Итак, $x_n \to C \in [0,2]$.

Чтобы найти предел последовательности C, устремим $n \to \infty$ в рекуррентном соотношении $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$. В результате получим уравнение

$$C = \sqrt{2+C},$$

имеющее два решения: $C = 2$ и $C = -1$. Правильным ответом, разумеется, будет $C = 2$, а второе решение $C = -1$ соответствует случаю, если бы каждый квадратный корень рассматривался в смысле отрицательного значения (конечно, тогда пришлось бы слегка модифицировать доказательство сходимости, но последовательность всё равно осталась бы сходящейся). Этим примером мы решили задачу **№ 81**, причём сделали даже несколько более того, что требовалось условием. Совершенно аналогично решается задача **№ 637**, где вместо $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ рассматривается рекуррентное соотношение $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$ при $a > 0$. Для таких последовательностей справедлива оценка $x_n \leqslant \frac{1}{2}(1+\sqrt{4a+1})$, доказываемая также по индукции.

Рассмотрим ещё один поучительный случай, когда последовательность задана не явным образом, а рекуррентной зависимостью (задача **№ 148**, она же **№ 637.1**). Нужно найти предел последовательности

$$x_1 = a; \quad x_2 = b; \quad x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}.$$

Все её элементы лежат между a и b, причём последовательность является фундаментальной (доказательство этого факта оставим в качестве упражнения), а стало быть, сходится к конечному пределу $C \in \big[\min(a,b);\ \max(a,b)\big]$.

Переходя к пределу в формуле для x_n при $n \to \infty$, получаем соотношение

$$C = \frac{C+C}{2} = C,$$

которое не содержит никаких ошибок или противоречий, однако и толку от него никакого. Получившееся тождество говорит о том, что данная задача просто не решается этим методом.

А как же всё-таки она решается? Ограничимся подсказкой, которая открывает путь нахождения предела: запишем первые несколько элементов последовательности в виде

$$\begin{aligned}
&x_1 = a;\\
&x_2 = b = a + (b-a);\\
&x_3 = \frac{a+b}{2} = a + (b-a) - \frac{b-a}{2};\\
&x_4 = \frac{a+3b}{4} = a + (b-a) - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4};\\
&x_5 = \frac{3a+5b}{8} = a + (b-a) - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4} - \frac{b-a}{8} \quad \text{и т.д.}
\end{aligned}$$

Дальнейшие выкладки, позволяющие найти явный вид для x_n, представляются достаточно очевидными.

Завершим этот параграф рассмотрением ещё одного приёма, связанного с рекуррентными соотношениями. Пусть необходимо найти предел

$$x_n = \frac{2^n}{n!}$$

из задачи **№ 59**. Вообще говоря, мы уже знаем достаточно, чтобы найти его как минимум двумя способами. Во-первых, согласно неравенствам таблицы 3, начиная с некоторого номера, имеет место

$$0 < x_n = \frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0.$$

Во-вторых, можно показать монотонность и ограниченность последовательности (это легко), а затем воспользоваться рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{2}{n+1} x_n \tag{39}$$

так, как мы это делали в предыдущей задаче.

Однако хотелось бы продемонстрировать другой приём, связанный с рекуррентностью. Для этого заметим, что начиная с $n = 2$, из (39) вытекает неравенство $x_{n+1} \leqslant \frac{2}{3} x_n$. Запишем его последовательно для возрастающих n:

$$\begin{aligned} &x_3 \leqslant \tfrac{2}{3} x_2 = 2 \cdot \tfrac{2}{3};\\ &x_4 \leqslant \tfrac{2}{3} x_3 \leqslant 2 \cdot (\tfrac{2}{3})^2;\\ &x_5 \leqslant \tfrac{2}{3} x_4 \leqslant 2 \cdot (\tfrac{2}{3})^3 \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

В итоге придём к неравенству

$$0 < x_n \leqslant 2 \cdot (\tfrac{2}{3})^{n-2}, \quad n > 2,$$

откуда по теореме «о двух милиционерах» находится искомый предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Этот способ хорош своей самодостаточностью: он не требует ни привлечения ранее доказанных неравенств, ни предварительного доказательства того, что предел вообще существует.

В качестве упражнения рекомендуется задача **№ 55** (она же **№ 2548**). Для её решения нужно рассмотреть разность $x_n - \frac{x_n}{2}$.

9. Функции от последовательностей

В задаче **№ 81** предыдущего параграфа мы смело (и без всяких, кстати, обоснований) перешли к пределу в равенстве $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Предел в левой части существовал; существовал и предел подкоренного выражения. Вопрос, однако, в следующем: можно ли пользоваться утверждением

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \tag{40}$$

и какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, чтобы подобные предельные переходы были корректны?

Разберём следующий пример. Пусть

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{и} \quad f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Нетрудно убедиться, что последовательность $y_n = f(x_n) = \operatorname{sgn} \frac{(-1)^n}{n}$ не имеет предела. Действительно, знаки чередуются: $x_{2k} > 0$ и $x_{2k-1} < 0$, а следовательно, $y_{2k} = \operatorname{sgn}(x_{2k}) = 1$ и $y_{2k-1} = \operatorname{sgn}(x_{2k-1}) = -1$. Иными словами, $y_n = (-1)^n$, а эта последовательность не является фундаментальной[19], хоть и ограничена.

С другой стороны, последовательность x_n есть произведение ограниченной $(-1)^n$ на бесконечно малую $\frac{1}{n}$ и значит, сама бесконечно мала: $x_n \to 0$. Но $\operatorname{sgn} 0 = 0$ — мы построили такой пример, что

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Более того, один из пределов здесь вообще не существует. Значит, утверждение (40) в общем случае неверно.

Ответ на вопрос о том, когда же формулой (40) всё-таки можно пользоваться, даёт понятие непрерывности функции и определение предела функции по Гейне. Вот правильное утверждение:

> *Если последовательность x_n имеет конечный предел $x_n \to x < \infty$ и функция f непрерывна в точке x, то последовательность $\xi_n = f(x_n)$ сходится к $f(x)$.*

Теперь видно, что предельный переход в $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ был корректен, ведь функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна всюду на своей области определения $[0, +\infty)$.

Существуют, однако, случаи, когда для обоснования предельного перехода вовсе не требуется забегать вперёд и пользоваться свойствами непрерывных функций. Для этого нужно вспомнить свойства сходящихся последовательностей: если две последовательности сходятся, то их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что делимое и делитель не обращаются в ноль или бесконечность одновременно) тоже имеют предел, равный сумме, разности, произведению и частному пределов соответственно.

Отсюда, например, следует, что если $x_n \to x$, то $x_n^2 = x_n \cdot x_n \to x^2$, и далее по индукции

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n^k = x^k.$$

Добавляя сюда свойство предела суммы и разности, получаем, что для любого полинома $p_k(t)$ конечной степени $k \in \mathbb{N}$ справедлив переход

$$\lim_{n\to\infty} p_k(x_n) = p_k\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

при условии что x_n сходится к конечному числу.

Наконец, предельный переход (40) справедлив для любой функции $f(t)$, являющейся отношением двух полиномов конечных степеней, при условии, что в точке x они не обращаются в ноль или бесконечность одновременно. В свете приведённых результатов для задачи **№ 81** лучше было бы рассматривать эквивалентное равенство $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$, помня что $x_n > 0$.

[19] Потому что $|x_n - x_{n+1}| \equiv 2$.

10. Последовательности вида $\sqrt[n]{*}$

Мы уже доказали в § 4, что последовательность $\sqrt[n]{n!}$ является бесконечно большой (и ниже в § 13 увидим, *насколько* большой). В этом параграфе мы рассмотрим ещё несколько пределов последовательностей с корнями n-ой степени. Начнём с самого простого из них (задача **№ 63**) — покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a = \text{const} > 0. \tag{41}$$

Сделать это лучше всего по определению. Заметим, что при $a = 1$ утверждение очевидно. Пусть теперь $a > 1$, тогда $\sqrt[n]{a} > 1$ и $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1$. Рассмотрим неравенство $|x_n - x| < \varepsilon$ из определения предела:

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon.$$

Прологарифмируем это неравенство по основанию a. При этом, так как $a > 1$ и $1 + \varepsilon > 1$, знак неравенства не изменится:

$$\frac{1}{n}\log_a a = \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}.$$

Итак, при $a > 1$ утверждение доказано:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)} \quad \forall n \geqslant N: \quad |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon.$$

Если же $a < 1$, то можно записать

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{A}}, \quad A = \frac{1}{a} > 1,$$

а эта последовательность стремится к 1 в свете вышедоказанного случая $a > 1$ и результатов предыдущего параграфа. Тем самым, утверждение (41) доказано полностью.

Следующий предел (задача **№ 65**) менее очевиден. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{42}$$

Простейшее доказательство можно построить на основе представления

$$\sqrt[n]{n} = e^{\ln \sqrt[n]{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}.$$

Здесь $\frac{1}{n}\ln n \to 0$ на основании теоремы Штольца (кстати, это задача **№ 64** и она же **№ 144(б)**), а функция e^t непрерывна в точке 0, так что $\sqrt[n]{n} \to e^0 = 1$. Однако это обоснование опирается на понятие непрерывности функции и потому небезупречно.

Более корректное доказательство выглядит так. Вместо (42) будем рассматривать эквивалентное утверждение

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0.$$

Заметим, что $n \geqslant 1$ и, значит, можно записать $\sqrt[n]{n} = 1 + \xi_n$, где $\xi_n \geqslant 0$. Необходимо показать, что последовательность $\xi_n = \sqrt[n]{n} - 1$ является бесконечно малой.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+\xi_n)^n = 1 + n\xi_n + \tfrac{n(n-1)}{2}\xi_n^2 + \ldots + \xi_n^n \geqslant \tfrac{n(n-1)}{2}\xi_n^2.$$

Отсюда получаем неравенства для ξ_n:

$$0 \leqslant \xi_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0, \quad n \geqslant 2.$$

Формула (42) доказана.

Наконец, обоснуем ещё один предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1. \tag{43}$$

Он вытекает из неравенств $1 \leqslant \ln n \leqslant n$ при $n \geqslant 3$.

То, что $\ln n \geqslant 1$ при $n \geqslant 3$, достаточно очевидно. Неравенство $\ln n \leqslant n$ нетрудно получить, доказав по индукции эквивалентное неравенство $n \leqslant e^n$. Проделаем это.

При $n = 3$ получаем очевидное $3 < e^3 \approx 20$. Попробуем теперь, предположив справедливость $n \leqslant e^n$, вывести отсюда $n+1 \leqslant e^{n+1}$. Домножим обе части на e:

$$e^{n+1} \geqslant ne > 2n = n + n \geqslant n + 1.$$

Неравенство доказано и формула (43) имеет место. Из неё уже совсем нетрудно получить предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log_a n} = 1, \quad a > 1.$$

Для этого достаточно вспомнить формулу (41) и тот факт, что величины $\ln n$ и $\log_a n$ отличаются на постоянный множитель $\ln a > 0$.

В качестве упражнения рекомендуется самостоятельно найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n},$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — положительные константы. Эта задача решается с использованием неравенств на основании теоремы «о двух милиционерах».

11. Эйлерова константа

Мы уже показали в § 5, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

является бесконечно большой. В этом параграфе мы докажем сходимость к *конечному* пределу очень похожей последовательности

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Сделаем это, показав её монотонность и ограниченность (задача **№ 146**).

Монотонность показывается очень несложно, на основе неравенства (34):

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$$

Итак, последовательность монотонно убывает. Осталось показать её ограниченность снизу. На основании всё того же неравенства имеем

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Тогда можно ограничить снизу каждое рациональное слагаемое, составляющее сумму x_n:

$$1 = \tfrac{1}{1} > \ln\tfrac{2}{1}, \quad \tfrac{1}{2} > \ln\tfrac{3}{2}, \quad \tfrac{1}{3} > \ln\tfrac{4}{3}, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{n} > \ln\tfrac{n+1}{n}.$$

Получаем отсюда, что $y_n > 0$. Действительно,

$$y_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n > \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n =$$
$$= \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)-\ln n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0.$$

Итак, последовательность y_n сходится к некоторому пределу γ, то есть можно записать

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = x_n = \gamma+\ln n+\xi_n, \text{ где } \lim_{n\to\infty}\xi_n = 0. \tag{44}$$

Последовательность частичных сумм гармонического ряда возрастает как $\ln n$. Величину γ, присутствующую в этой формуле, называют *постоянной Эйлера*. Говорят, найдя эту константу с точностью три знака ($\gamma \approx 0.577$), Л. Эйлер решил было, что $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, однако уже в следующем, четвёртом, знаке обнаружил расхождение:

$$\gamma \approx 0.577216 \neq 0.57735 \approx \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

С постоянной Эйлера связаны две старые математические проблемы, которые не решены до сих пор, а именно:

- каким является число γ — алгебраическим[20] или трансцендентным?
- существует ли связь между γ и тремя фундаментальными математическими константами (e, i, π)?

Теперь, зная формулу (44), мы можем найти предел интересной последовательности из задачи **№ 147**:

$$a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Заметим для этого, что $a_n = x_{2n} - x_n$:

$$a_n = \gamma+\ln 2n+\xi_{2n}-(\gamma+\ln n+\xi_n) = \ln 2+\xi_{2n}-\xi_n. \tag{45}$$

Последовательность ξ_n является бесконечно малой, то есть

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N: \quad |\xi_n| < \varepsilon.$$

Но если $n \geqslant N$, то тем более $2n \geqslant N$. Значит, последовательность ξ_{2n} тоже удовлетворяет неравенству $|\xi_{2n}| < \varepsilon$ и является бесконечно малой. Предел правой части (45), стало быть, существует и равен $\ln 2$, и к этой же величине стремится последовательность a_n.

Рекомендуется самостоятельно решить очень похожую задачу **№ 2661** (это так называемая *задача Лейбница*).

[20] *Алгебраическим* называется число, являющееся корнем некоторого полинома с целыми коэффициентами. Все числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*.

12. Подпоследовательности и частичные пределы

Понятие подпоследовательности обычно воспринимается студентами с некоторым трудом, хотя ничего сложного в нём нет:

> Пусть n_k — строго монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел: $n_k \in \mathbb{N}$ и $n_k < n_{k+1}$. Пусть x_n — произвольная последовательность. Говорят, что те её элементы, которые имеют номера n_k, $k = 1, 2, \ldots$ образуют *подпоследовательность* a_{n_k} последовательности a_n.

Так, например, если $n_k = 2k$, то $a_{n_k} = a_{2k}$ — подпоследовательность чётных элементов, а при $n_k = 2k - 1$ получаем $a_{n_k} = a_{2k-1}$ — подпоследовательность нечётных элементов.

> Если a_{n_k} — такая подпоследовательность последовательности a_n, что
>
> $$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \zeta,$$
>
> то число ζ называется *частичным пределом* последовательности a_n.

Теперь видно, что раскритикованная в § 2 формулировка «в окрестности точки лежит бесконечно много элементов последовательности» соответствует *частичному* пределу, а не пределу последовательности как таковому. Вообще, если последовательность сходится, то все её частичные пределы равны, а если у последовательности существуют хотя бы два различных частичных предела, то сходиться она не может. Если же точка такова, что некоторая её окрестность содержит лишь конечное число элементов последовательности, то она не может являться ни частичным пределом, ни тем более пределом в обычном смысле.

Из предыдущего абзаца, в частности, вытекает, что если $x_n \to x$ и $p_m(k)$ — некоторый полином конечной степени $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k + \ldots + \alpha_m k^m, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad \alpha_m > 0,$$

то $\lim_{k\to\infty} x_{p_m(k)} = x$. При этом, разумеется, предполагается, что k достаточно велико, чтобы выполнялось $p_m(k) > 0$. Формулы (18)–(19) являются частным случаем этого утверждения.

Пусть Σ_x — множество всех частичных пределов последовательности x_n. Отсюда вводятся понятия верхнего и нижнего пределов:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \min \Sigma_x, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \max \Sigma_x.$$

Может возникнуть законный вопрос: а что, если множество Σ_x не имеет наименьшего и/или наибольшего элемента? К счастью, подвоха здесь нет: верхний и нижний пределы (конечные или бесконечные) существуют *всегда*. Подробнейшие рассуждения на эту тему приведены в [4], т. 1, гл. I, § 4, п. 42.

Равенство между собой верхнего и нижнего пределов есть необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

Далее, говоря о частичных пределах, нужно обязательно упомянуть *принцип Больцано–Вейерштрасса*, утверждающий, что *из всякой ограниченной последовательности можно выделить по меньшей мере одну сходящуюся подпоследовательность*. Доказательство этой теоремы конструктивно в том смысле, что указывает конкретный способ, как это сделать (см. [4], т. 1, гл. I, § 4, п. 41). На самом деле имеет место более сильная формулировка данного принципа:

Из всякой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, причём если последовательность ограничена, то подпоследовательность будет сходиться к конечному числу. Из неограниченной же последовательности можно извлечь бесконечно большую подпоследовательность.

Докажем вторую половину этого утверждения (задача **№ 126**). Пусть последовательность x_n неограничена — это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad |x_n| \geqslant \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon = 1$ и найдём номер n_1 такой, что $|x_{n_1}| \geqslant 1$. Далее положим $\varepsilon = 2$ и найдём номер $n_2 > n_1$ такой, что $|x_{n_2}| \geqslant 2$ (если бы такого номера не существовало, то все элементы последовательности, кроме первых n_1 штук, лежали бы в $S_1(0)$, а это означает ограниченность последовательности). Продолжая в том же духе, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, для которой

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K = \lceil \varepsilon \rceil \quad \forall k \geqslant K: \quad |x_{n_k}| \geqslant k \geqslant K > \varepsilon.$$

По определению (15) это означает, что x_{n_k} является бесконечно большой.

Применительно к частичным пределам большой интерес представляют рациональные числа. Как известно, вся их совокупность образует счётное множество, то есть существует такая последовательность рациональных чисел q_n, $q_n \in \mathbb{Q}$, в которой оказываются перечисленными они *все*.

С другой стороны, известно, что любое вещественное число можно с любой точностью приблизить рациональным числом, то есть

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q}: \quad |\xi - q| < \varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и выбирая соответствующие числа $q \in \mathbb{Q}$, получим последовательность рациональных чисел, сходящуюся к ξ. Очевидно, она будет подпоследовательностью всей последовательности q_n, а число ξ — любое вещественное число! — её частичным пределом! Итак, мы построили пример, в точности подходящий под вопросы задачи **№ 123(в,г)**.

Ответим и на остальные вопросы этой задачи. В **№ 123(а)** нужно построить последовательность, не имеющую конечных частичных пределов. Таковой, к примеру, является последовательность $x_n = n$. Действительно, если взять любое конечное число $c \in \mathbb{R}$, то его окрестность $S_{1/4}(c)$ не может содержать более одного числа $n \in \mathbb{N}$ — а значит, и о частичном пределе речи быть не может.

В **№ 123(б)** нужно построить последовательность, имеющую единственный конечный частичный предел, но не являющуюся сходящейся. Здесь интересным примером является последовательность

$$x_n = n^{\frac{1+(-1)^n}{2}},$$

которая принимает значения $1, 2, 1, 4, 1, 6, \ldots$ — то есть, $x_{2k} = 2k$ и $x_{2k-1} = 1$. Очевидно, что для неё

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

То, что последовательность не имеет конечных частичных пределов, кроме единицы ($x_{2k-1} \to 1$), доказывается точно так же, как в **№ 123(а)**.

Наконец, рассмотрим задачу **№ 136** — самую, пожалуй, интересную из всех связанных с частичными пределами. Пусть имеется последовательность x_n, такая что

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(x_{n+1}-x_n\bigr)=0, \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n = l, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = L.$$

Требуется показать, что для такой последовательности *любое число* из (l, L) будет являться её частичным пределом. Предполагается, конечно, что $l \neq L$, иначе утверждение тривиально.

Итак, пусть $l < L$. Предположим от противного, что некоторое число c (такое, что $l < c < L$) не является частичным пределом последовательности x_n. Это означает, что у него существует δ-окрестность $S_\delta(c)$, не содержащая ни одного элемента последовательности.

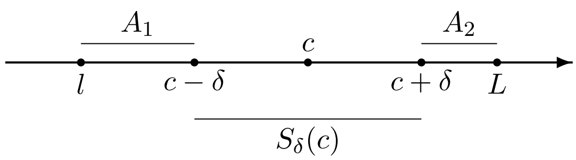

Рис. 5: к задаче № 136.

Заметим, что должно выполняться условие $\delta < \min(c-l, L-c)$, в противном случае одно из чисел l или L попадёт в $S_\delta(c)$ и не сможет быть частичным пределом последовательности. Окрестность $S_\delta(c)$ разбивает отрезок $[l, L]$ на два подмножества:

$$[l, L] = A_1 \cup A_2, \qquad A_1 = [l, c-\delta], \quad A_2 = [c+\delta, L].$$

В каждом из них, очевидно, должно содержаться бесконечно много элементов последовательности, иначе, опять-таки, какое-то из чисел l, L не могло бы быть её частичным пределом (рис. 5).

Введём обозначение $X_n = x_{n+1} - x_n$. По условию задачи,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0,$$

а значит, любая подпоследовательность X_{n_k} обязана быть бесконечно малой.

Пусть для определённости $x_1 \in A_1$. Тогда, последовательно увеличивая n, мы рано или поздно найдём такой номер n_1, что $x_{n_1} \in A_1$ и $x_{n_1+1} \in A_2$ (если такого номера нет, то все элементы последовательности лежат в A_1). Далее, обязательно найдётся такой номер $n_2 > n_1$, что $x_{n_2} \in A_2$ и $x_{n_2+1} \in A_1$ (если нет, то все элементы последовательности, за исключением конечного числа, лежат в A_2). Продолжая в том же духе, мы можем построить последовательность

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots,$$

обладающую тем свойством, что x_{n_i} и x_{n_i+1} лежат в разных множествах и отстоят друг от друга не менее чем на 2δ. Разумеется, аналогичную последовательность можно построить и для случая $x_1 \in A_2$.

Используем найденные номера для построения подпоследовательности X_{n_k} и получим, что

$$|X_{n_k}| = |x_{n_k+1} - x_{n_k}| \geqslant 2\delta,$$

а такая подпоследовательность не может сходиться к нулю! Следовательно, не может сходиться к нулю и последовательность X_n. Получившееся противоречие доказывает утверждение задачи.

13. Как Коши с Даламбером силой мерились

Несмотря на легкомысленное название данного параграфа, речь в нём пойдёт о таких серьёзных вещах, как связь между пределом последовательности и пределом функции, а также их причастности к исследованию сходимости числовых рядов. Изложение будет построено на основе понятия непрерывности функции, а потому параграф предназначен лишь для тех студентов, у которых позади как минимум один семестр математического анализа.

В § 7 мы показали, что из сходимости последовательности следует сходимость к тому же пределу её средних арифметических (формула (36), задача **№ 138**). Обратное, кстати говоря, неверно, что очень легко показывается на примере последовательности

$$x_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Действительно, для её средних арифметических справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2},$$

тогда как у последовательности существуют два различных частичных предела ($x_{2k} \to 0$ и $x_{2k-1} \to 1$) и стало быть, она не может сходиться.

Впрочем, сейчас предельное соотношение средних арифметических (36) понадобится нам для другого. Пусть имеется неотрицательная последовательность $x_n \geqslant 0$, сходящаяся к пределу $x > 0$. Составим по её элементам ещё одну последовательность

$$y_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

и докажем, что она сходится к тому же пределу.

Для этого прологарифмируем y_n:

$$\ln y_n = \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n}.$$

Применяя к последовательности $\ln y_n$ теорему Штольца, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \ln y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln x_{n+1}.$$

Поскольку функция $\ln t$ непрерывна при $t > 0$, предел в правой части существует и равен $\ln x$. Отсюда, потенцируя и учитывая непрерывность e^t, получаем *сходимость средних геометрических* (задача **№ 140**):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = x. \qquad (46)$$

Если же воспользоваться понятием одностороннего предела функции для $\ln t$, то формула (46) останется в силе и для случаев $x = 0$, $x = +\infty$.

Обратное утверждение снова неверно; чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть последовательность

$$x_n = 1 + (-1)^n = 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots$$

Для неё $y_n \equiv 0 \to 0$, однако сама последовательность предела не имеет.

Теперь введём для произвольной последовательности $x_n \geqslant 0$ операторы

$$\mathcal{C}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

называемые *пределом по Коши* и *пределом по Даламберу* соответственно[21].

Нужно заметить, что существование или несуществование этих двух пределов не связано с существованием или несуществованием предела самòй последовательности! В таблице 4 приведены соответствующие примеры последовательностей для $\mathcal{C}(x_n)$, которые очень рекомендуется разобрать самостоятельно.

x_n \ $\mathcal{C}(x_n)$	существует	не существует
сходится	$x_n = \dfrac{1}{n}$	$x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$
не сходится	$x_n = 2 + (-1)^n$	$x_n = 1 + (-1)^n$

Таблица 4: примеры на предел по Коши.

Далее предположим, что у некоторой последовательности x_n предел по Даламберу существует: $\mathcal{A}(x_n) = \alpha$. Это означает, что к α сходится последовательность

$$a_n = x_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n-1}}, \frac{x_{n+1}}{x_n}, \ldots \to \alpha.$$

Применяя к ней результат (46), получаем, что $\mathcal{C}(x_n) = \alpha$. Иными словами,

$$\mathcal{A}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha \;\Rightarrow\; \mathcal{C}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \alpha. \tag{47}$$

Из существования предела по Даламберу следует существование предела по Коши (задача **№ 141**, она же **№ 2593**)!

Обратное утверждение неверно, это легко увидеть на примере последовательности $x_n = n^{(-1)^n}$. Для неё справедливы соотношения

$$x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}, \quad x_{2k} = 2k, \quad x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}, \quad \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant n.$$

Тогда, с одной стороны,

$$1 \leftarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leqslant \sqrt[n]{x_n} \leqslant \sqrt[n]{n} \to 1.$$

С другой стороны, если выделить чётную и нечётную подпоследовательности, то

$$\frac{x_{2k}}{x_{2k-1}} = 2k(2k-1) \to \infty, \qquad \frac{x_{2k+1}}{x_{2k}} = \frac{1}{2k(2k+1)} \to 0.$$

Студенты, знакомые с числовыми рядами, без труда узна́ют в $\mathcal{C}(x_n)$ и $\mathcal{A}(x_n)$ формулы из признаков сходимости Коши и Даламбера, а в (47) — тот факт, что признак Коши имеет бо́льшую силу по сравнению с признаком Даламбера[22].

[21]Французские фамилии Коши и Даламбера в оригинале пишутся как *Cauchy* и *d'Alembert*, отсюда и обозначения.

[22]В студенческой интерпретации этот факт звучит как «Коши сильнее Даламбера», отсюда и название параграфа.

Наконец, воспользуемся результатом (47) для нахождения одного интересного предела (задача **№ 142**). Положим

$$x_n = \frac{n!}{n^n},$$

тогда предел по Даламберу $\mathcal{A}(x_n)$ существует и равен

$$\mathcal{A}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Получается, что предел по Коши также существует и равен ему:

$$\mathcal{C}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)}{\sqrt[n]{n!}} = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}.$$

Это, конечно, ещё не формула Стирлинга, но довольно близкий к ней результат. Из него уже можно видеть скорость роста последовательностей $n!$ и $\sqrt[n]{n!}$.

14. Итоги

Эти заметки не являются «решебником», но тем не менее в них показаны полные или частичные решения почти пятидесяти задач из сборника [3], и элементарные соображения аккуратности требуют составления некоторого указателя для удобства поиска. Таким указателем служит таблица 5: номера задач приведены в ней по параграфам в порядке упоминания.

§ 1	(стр. 2)	2, 10.1(в), 6, 7, 56, 2549, 2987
§ 2	(стр. 6)	44, 42(в), 93, 45(а,б,в), 67(а)
§ 3	(стр. 12)	129
§ 4	(стр. 14)	67(б,в), 8, 66
§ 5	(стр. 18)	87, 88, 2576, 84, 2572
§ 6	(стр. 21)	86, 79, 69, 75(а), 70, 80
§ 7	(стр. 24)	138, 53, 145(а), 58
§ 8	(стр. 27)	58, 81, 637, 148, 637.1, 59, 55, 2548
§ 9	(стр. 29)	81
§ 10	(стр. 31)	63, 64, 144(б), 65
§ 11	(стр. 32)	146, 147
§ 12	(стр. 34)	126, 123(а,б,в,г), 136
§ 13	(стр. 37)	138, 140, 141, 2593, 142

Таблица 5: указатель решённых задач.

Кроме того, в тексте было сформулировано более полутора десятков задач, предлагаемых для самостоятельного решения. Вот их перечень (также в порядке упоминания):

- решить задачу **№ 7**, не пользуясь результатом задачи **№ 6**;
- решить задачу **№ 10.1(г)**;
- найти сумму $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$ (задача аль-Ка́ши);

- пользуясь определением, обосновать пределы последовательностей из таблицы 1, кроме последовательности $\sqrt[n]{n!}$;

- построить пример, в котором сумма бесконечного числа бесконечно малых последовательностей не является бесконечно малой;

- построить две неограниченные последовательности, произведение которых является бесконечно малой;

- доказать по индукции, что начиная с некоторого номера, имеют место неравенства $n! \geqslant 2^n$, $n! \geqslant n^2$ и $n^2 \leqslant 2^n$;

- решить задачу **№ 82**, используя критерий Коши;

- с помощью критерия Коши доказать, что всякая последовательность, образованная циклическим перечислением конечного числа различных констант, расходится.

- доказать, что если последовательность монотонно возрастает (по крайней мере, начиная с некоторого номера), то она обязательно ограничена снизу;

- решить задачи **№ 94** и **№ 95**;

- доказать, что последовательность задачи **№ 58** монотонна и ограничена;

- доказать фундаментальность последовательности из задачи **№ 148**;

- решить задачу **№ 55**;

- найти предел последовательности $\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n}$, где все a_i — положительные константы;

- найти предел последовательности $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ из задачи **№ 2661** (задача Лейбница);

- разобрать примеры из таблицы 4.

Наконец, любителям казуистики можно предложить найти ошибку в следующем парадоксе, предложенном Дж. Пойа.

Покажем по индукции, что *все лошади имеют одну и ту же масть*. Предположим, что X — это множество всех лошадей на Земле[23], и если $x \in X$ есть некоторая лошадь, то $f(x)$ есть масть этой лошади.

Формула $P(n)$ есть утверждение «n лошадей имеют одну и ту же масть». Основание индукции $P(1)$ сомнений не вызывает: одна лошадь имеет только одну, свою собственную масть.

Покажем теперь переход $P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)$. Допустим, что $P(n)$ справедливо. Рассуждение подразумевает, что $n+1$ лошадей существуют; перенумеруем их и обозначим $x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1}$. Имеем

$$\underbrace{f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_n)}_{n} \quad \text{и} \quad \underbrace{f(x_2) = f(x_3) = ... = f(x_{n+1})}_{n}.$$

[23] По логике вещей, это множество конечно — следовательно, его элементы можно нумеровать.

Действительно, если бы хоть одно из соотношений не выполнялось, то утверждение $P(n) =$ “n лошадей имеют одну масть” не могло бы быть справедливым. Но из этих двух равенств транзитивно вытекает

$$\underbrace{f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_n) = f(x_{n+1})}_{n+1},$$

то есть утверждение $P(n+1)$ справедливо!

Список литературы

[1] Л. Эйлер[24] *Введение в анализ бесконечных.* /пер. с лат. — М.: Физматлит, 1961.

[2] Д. Кнут, Р. Грэхем, О. Паташник *Конкретная математика: основание информатики.* /пер. с англ. — М.: Мир, 1998.

[3] Б. Демидович[25] *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1972.

[4] Г. Фихтенгольц *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* — СПб.: Лань, 1997.

[5] Л. Кудрявцев *Курс математического анализа в 3 томах.* — М.: Высш. шк., 1988.

[6] Л.-О. Коши *Алгебраический анализ.* /пер. с франц. — Фрагменты в кн.: “Непрерывность функций и числовых областей”, Нск.: «Напрасный труд», 2000.

[24] Эта книга имеется в электронном виде, любой желающий может попросить копию.

[25] Специально указано старое издание задачника, так как в последнем издании 2002 года допущено много опечаток и поменялась нумерация задач, причём изменения коснулись задач, упомянутых в этих заметках.