Предел функции

М. Баландин*

Сентябрь–ноябрь 2007

Предисловие

Предел функции, обобщающий понятие предела последовательности, является в математическом анализе одним из самых фундаментальных понятий. Именно через предел определяются производная и дифференциал, действия с которыми лежат в основе практически всех математических исследований.

Эти заметки продолжают цикл [1, 2], хотя и написаны значительно позднее. Особое внимание здесь уделяется символике Ландау (также известной как о-символика), применяемой при сравнении бесконечно больших и бесконечно малых величин.

Основным задачником по-прежнему является [3]. В конце приведён список задач, которые по ходу изложения были решены полностью или частично. Там же перечислены задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения.

В рамках данной темы нам придётся столкнуться с так называемыми *гиперболическими функциями*, из которых основными являются гиперболический синус $\operatorname{sh} x$ и гиперболический косинус $\operatorname{ch} x$. Они определяются следующим образом:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Существуют определённые причины, по которым эти функции называются именно так; изложение этих причин было бы слишком длинным. Отметим лишь, что для них справедливы многие тождества, очень сильно напоминающие тригонометрические (например, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ и т.д.), а если положить $x(t) = \operatorname{ch} t$ и $y(t) = \operatorname{sh} t$, то будет иметь место равенство $x^2 - y^2 = 1$, которое есть не что иное, как уравнение гиперболы.

Через гиперболические синус и косинус естественным образом определяются гиперболический тангенс $\operatorname{th} x$ и гиперболический котангенс $\operatorname{cth} x$:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Алгебраическими преобразованиями и логарифмированием достаточно нетрудно найти выражения для обратных гиперболических функций (каждая из них имеет в своём названии приставку «*арea-*»: ареасинус, ареакосинус и т.д.):

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\,\bigr), \quad \operatorname{Arch} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\,\bigr),$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

Функция $\operatorname{ch} x$ является чётной, а функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{Arth} x$, $\operatorname{cth} x$ и $\operatorname{Arcth} x$ — нечётными. Функция $\operatorname{Arch} x$ не является ни чётной, ни нечётной.

*Кафедра прикладной математики НГТУ.

1. Определение предела функции

Вспомним для начала, что любая числовая последовательность является подмножеством — причём не более чем счётным — множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Этот факт часто записывают в виде

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

или каким-то схожим образом. С понятием предела числовой последовательности [1] мы уже знакомы.

Предположим теперь, что $f\colon A \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in A$ является *внутренней точкой* области определения функции, т.е., входит во множество A вместе с некоторой своей окрестностью:

$$\exists d > 0: \quad \mathrm{S}_d(x_0) \subset A. \tag{1}$$

Способ определения предела функции через предел последовательности, носящий имя Г. Гейне, заключается в следующем. Построим произвольную последовательность x_n, удовлетворяющую трём условиям:

1. Все элементы последовательности лежат во множестве $\mathrm{S}_d(x_0)$ из (1):
$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{S}_d(x_0) \subset A; \tag{2}$$
2. Ни один из элементов последовательности не равен x_0, т.е.
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x_n \neq x_0; \tag{3}$$
3. Пределом последовательности x_n является x_0:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{4}$$

Теперь, зная последовательность x_n и функцию $f(x)$, построим ещё одну последовательность $X_n = f(x_n)$ и исследуем её сходимость. Возможны два варианта: либо X_n не сходится — и тогда будем говорить, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0 — либо сходится к некоторому конечному или бесконечному пределу $X_0 = \lim_{n\to\infty} X_n$.

Определение Гейне гласит: число X_0 называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, и этот факт обозначается

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = X_0,$$

если имеет место сходимость $X_n \to X_0$ при *любом выборе* последовательности x_n, удовлетворяющей трём условиям (2)–(4), т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = X_0 \iff \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \big(x_0 \neq x_n \to x_0,\ x_n \in \mathrm{S}_d(x_0)\big): \quad f(x_n) = X_n \to X_0. \tag{5}$$

Заметим, что условие (2) представляется довольно очевидным — если x_n выходит из области определения функции, то запись $f(x_n)$ оказывается лишённой смысла. В дальнейшем мы будем считать это само собой разумеющимся. Возможны, конечно, случаи, когда точка x_0 является *граничной* для множества A (например, функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ определена при $|x| \leqslant 1$ и $x_0 = 1$), тогда условие (2) должно быть заменено на $x_n \in A$ и речь фактически идёт об *односторонних* пределах. Их мы будем рассматривать ниже в § 3. Условия (3)–(4) кратко записываются в виде $x_0 \neq x_n \to x_0$.

Попробуем воспользоваться этим определением для доказательства того факта, что

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 \tag{6}$$

(задача **№ 401**).

Здесь $x_0 = 2$ и функция $f(x) = x^2$ определена всюду на $\mathbb{R}$. Положим $x_n = 2 + \varepsilon_n$, где ε_n — произвольная последовательность, для которой $0 \neq \varepsilon_n \to 0$. Тогда

$$X_n = x_n^2 = (2+\varepsilon_n)^2 = 4 + 4\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 \to 4$$

и в силу произвольности выбора ε_n утверждение доказано.

Ещё проще показать, что функция $\operatorname{sgn}^2 x$, где $\operatorname{sgn} x$ — функция знака

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{7}$$

(графики см. на рис. 1) имеет в точке $x = 0$ единичный предел. Действительно,

$$\operatorname{sgn}^2 x = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

и для любой последовательности x_n, удовлетворяющей требованию (3) $x_n \neq 0$ получаем $X_n = \operatorname{sgn}^2 x_n \equiv 1$, так что $X_n \to 1$ и

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}^2 x = 1.$$

Интересно, что это значение предела не совпадает со значением функции в точке.

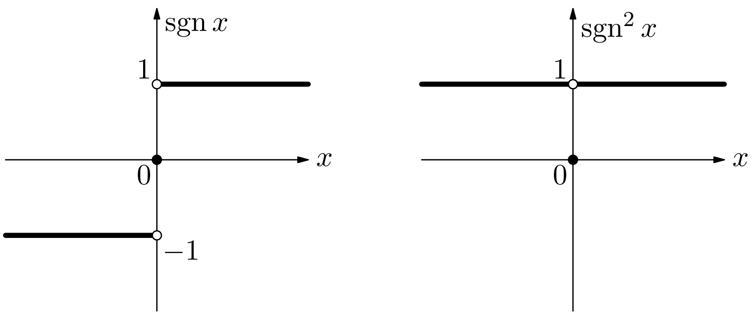

Рис. 1: Функция знака $\operatorname{sgn} x$ и её квадрат $\operatorname{sgn}^2 x$.

С другой стороны, функция (7) не имеет предела в нуле. Чтобы показать это, достаточно взять последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Такая последовательность удовлетворяет условию $0 \neq x_n \to 0$ и можно заметить, что

$$x_{2k} > 0 \text{ и } x_{2k-1} < 0.$$

Тогда для $X_n = \operatorname{sgn} x_n$ получаем

$$X_{2k} \equiv 1 \text{ и } X_{2k-1} \equiv -1 \ \Rightarrow\ X_n = (-1)^n,$$

а эта последовательность не имеет предела. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x \text{ не существует.}$$

Заметим, что несуществование предела по Гейне можно показать и другим способом. Для этого нужно построить две последовательности x_n^1 и x_n^2 такие, что $X_n^1 = f(x_n^1)$ и $X_n^2 = f(x_n^2)$ сходятся, но к разным пределам. В примере с $f(x) = \operatorname{sgn} x$ можно было бы взять

$$x_n^1 = \tfrac{1}{n},\;\; x_n^2 = -\tfrac{1}{n} \;\Rightarrow\; X_n^1 \equiv 1,\; X_n^2 \equiv -1.$$

Определение Гейне без всяких изменений годится и для случая бесконечных пределов. Так, в задаче **№ 402** для доказательства

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$

положим $x_n = 1 + \varepsilon_n$, где $0 \neq \varepsilon_n \to 0$. Тогда

$$X_n = \frac{1}{\big(1-(1+\varepsilon_n)\big)^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)^2$$

и $X_n \to +\infty$ в силу бесконечной малости ε_n.

В качестве упражнения рекомендуется доказать, что функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ не имеют предела на бесконечности.

Из определения Гейне, сводящего предел функции к пределу последовательности, сразу следует, что соответствующие свойства (теорема «о двух милиционерах», предел суммы, разности, произведения и т.п.) остаются в силе. Кроме того, это определение справедливо и «наоборот», чем мы уже не раз пользовались, например, в [1] § 7 и [2] § 4, когда применяли функции к исследованию последовательностей.

Второе определение предела функции принадлежит О.-Л. Коши[1] и чтобы его сформулировать, нам сто́ит лишний раз вспомнить определения окрестностей точек:

$$\mathrm{S}_\varepsilon(x) = \{y:\ |x-y| < \varepsilon\},$$
$$\hat{\mathrm{S}}_\varepsilon(x) = \{y:\ 0 < |x-y| < \varepsilon\} = \mathrm{S}_\varepsilon(x) \setminus \{x\}.$$

Здесь вторая формула определяет *проколотую* ε-окрестность точки x.

В этих терминах определение Коши формулируется следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = X_0 \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0): \quad f(x) \in \mathrm{S}_\varepsilon(X_0) \tag{8}$$

или, в более развёрнутом виде,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = X_0 \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x\, (0 < |x-x_0| < \delta): \quad |f(x) - X_0| < \varepsilon. \tag{9}$$

[1]Одна словесная формулировка определения Коши была приведена в [1]. Вот ещё одна, взятая из [6]: «ежели величины, приписываемые каком-либо переменному количеству, приближаются более и более к величине определённой, так что наконец разнствуют от оной столь мало сколько угодно, то сия последняя величина называется *пределом* всех прочих».

Формулировка (8) может быть записана более наглядно, однако для этого нам понадобится дополнительное понятие. Пусть множество A является подмножеством области определения функции $f(x)$. Тогда его *образом* будем называть множество $f(A)$ такое, что

$$f(A) = \{y : \ y = f(x), \ x \in A\}.$$

Например, для $f(x) = x^2$ и $A = [1, 2]$ получаем $f(A) = [1, 4]$, для $f(x) = \sin x$ и $A = (0, \pi)$ образом будет $f(A) = (0, 1]$ и т.п.

С учётом понятия образа множества для (8)–(9) можно записать эквивалентную формулировку:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = X_0 \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \quad f\big(\hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0)\big) \subset \mathrm{S}_\varepsilon(X_0). \tag{10}$$

Геометрическая интерпретация такого определения показана на рис. 2.

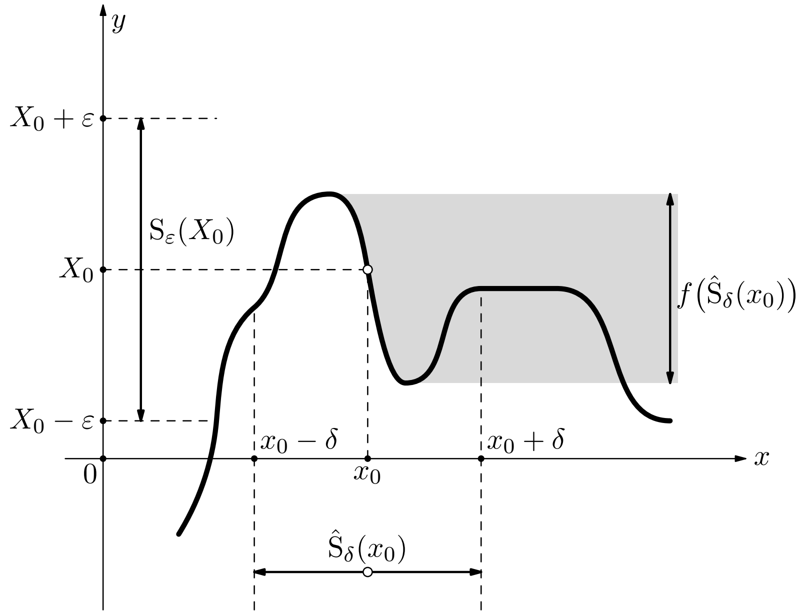

Рис. 2: К определению предела функции по Коши.

Вернёмся к задаче **№ 401** и рассмотрим её решение с использованием (10). Здесь $x_0 = 2$, $X_0 = 4$ и $f(x) = x^2$. Тогда, полагая[2] $\delta \leqslant 2$, находим

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{S}}_\delta(2) &= (2-\delta, 2) \cup (2, 2+\delta) = (2-\delta, 2+\delta) \setminus \{2\}; \\ f\big(\hat{\mathrm{S}}_\delta(2)\big) &= \big((2-\delta)^2, 4\big) \cup \big(4, (2+\delta)^2\big) = \big((2-\delta)^2, (2+\delta)^2\big) \setminus \{4\}; \\ \mathrm{S}_\varepsilon(4) &= (4-\varepsilon, 4+\varepsilon). \end{aligned}$$

Условие $f\big(\hat{\mathrm{S}}_\delta(2)\big) \subset \mathrm{S}_\varepsilon(4)$ принимает вид неравенства

$$4 - \varepsilon < (2-\delta)^2 < (2+\delta)^2 < 4 + \varepsilon,$$

которое, с учётом $2 > \delta > 0$, можно записать системой

$$\begin{cases} 2 - \delta > \sqrt{4-\varepsilon} \\ 2 + \delta < \sqrt{4+\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta < 2 - \sqrt{4-\varepsilon} \\ \delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 \end{cases}.$$

[2]Считая $\delta \leqslant 2$, мы на самом деле не ограничиваем общности. Действительно, если условие (10) выполняется при $\delta > 2$, оно тем более выполняется при $\delta \leqslant 2$. Фактически, можно просто сослаться на условие (1).

Получаем отсюда, что условие (10) будет выполняться, если δ удовлетворяет ограничению $\delta < \min\{2, 2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\}$. Например,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \tfrac{1}{2}\min\{2, 2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\}: \quad f\bigl(\hat{\mathrm{S}}_\delta(2)\bigr) \subset \mathrm{S}_\varepsilon(4), \qquad f(x) = x^2$$

и утверждение доказано.

2. Элементарные функции и непрерывность

Понятие непрерывности функции определяется естественным образом через предел: функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если её предел в этой точке существует и совпадает с $f(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{11}$$

Поскольку здесь автоматически предполагается, что значение функции в точке существует, в определении Гейне можно отказаться от требования (3), а в определении Коши — от проколотости окрестности $\mathrm{S}_\delta(x_0)$. Соответствующие модификации условий (5) и (8)–(10) выглядят следующим образом:

$$\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \bigl(x_n \to x_0,\ x_n \in \mathrm{S}_d(x_0)\bigr): \quad f(x_n) = X_n \to f(x_0); \tag{12}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{S}_\delta(x_0): \quad f(x) \in \mathrm{S}_\varepsilon(f(x_0)); \tag{13}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x\ (|x - x_0| < \delta): \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon; \tag{14}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad f\bigl(\mathrm{S}_\delta(x_0)\bigr) \subset \mathrm{S}_\varepsilon(f(x_0)). \tag{15}$$

Из свойств предела следует, что сумма, разность, произведение и частное[3] двух функций, непрерывных в точке, образуют функцию, также непрерывную в этой точке. Кроме того, имеет место следующая важная теорема:

> Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon C \to \mathbb{R}$, где $B \subset C$. Пусть $x_0 \in A$ — внутренняя точка области определения $f(x)$, такая, что $y_0 = f(x_0)$ является внутренней точкой множества C. Тогда, если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $g(x)$ непрерывна в точке y_0, то имеет место равенство
>
> $$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(y_0) = g(f(x_0)). \tag{16}$$
>
> Иными словами, функция $f(g(x))$, являющаяся суперпозицией $(g \star f)$, непрерывна в точке x_0.

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывности элементарных функций. В задаче **№ 401** мы фактически показали, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x_0 = 2$. Это доказательство можно без труда обобщить на произвольный случай $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$. Положим по Гейне $x_n = x_0 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$:

$$X_n = (x_0 + \varepsilon_n)^m = x_0^m + \underbrace{m x_0^{m-1}\varepsilon_n + \tfrac{m(m-1)}{2} x_0^{m-2}\varepsilon_n^2 + \ldots + \varepsilon_n^m}_{m}.$$

[3] Если знаменатель не обращается в ноль.

Число слагаемых, охваченных фигурной скобкой, конечно, и все они стремятся к нулю при $n \to \infty$ из-за бесконечной малости ε_n, так что

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{x\to x_0} x^m = x_0^m.$$

Теперь предположим, что показатель степени является положительным рациональным числом: $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{Q}^+$. В общем случае выкладки оказываются слишком длинными[4], и здесь мы ограничимся примером $p = \frac{1}{2}$:

$$X_n = \sqrt{x_0 + \varepsilon_n}, \quad x_0 > 0.$$

Чтобы удовлетворить требованию (2), наложим на ε_n ограничение $|\varepsilon_n| \leqslant x_0$. Рассмотрим разность $X_n - f(x_0)$:

$$X_n - f(x_0) = \sqrt{x_0+\varepsilon_n} - \sqrt{x_0} = \frac{(\sqrt{x_0+\varepsilon_n} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\varepsilon_n} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0+\varepsilon_n} + \sqrt{x_0}} = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{x_0+\varepsilon_n} + \sqrt{x_0}}.$$

По теореме «о двух милиционерах»,

$$0 \leqslant |X_n - f(x_0)| \leqslant \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{x_0}} \to 0,$$

а значит, разность $X_n - f(x_0)$ бесконечно мала, откуда следует $X_n \to f(x_0)$.

Наконец, вспомним определение отрицательной степени: $x^{-\alpha} = 1/x^{\alpha}$. Если $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ (сюда же входит случай $\alpha \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$), то в знаменателе стоит непрерывная функция. Если, сверх того, $x_0^{\alpha} \neq 0$, то и функция $f(x) = x - \alpha$ будет непрерывной в точке x_0. Итак —

Степенная функция $f(x) = x^a$ с целым или рациональным показателем непрерывна всюду, где она определена и конечна.

Перейдём теперь к тригонометрическим функциям. Для рассмотрения вопроса об их непрерывности нам понадобится вспомогательное неравенство

$$|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|. \tag{17}$$

В силу нечётности функций и того факта, что $|\sin\alpha| \leqslant 1$, нам достаточно доказать его при $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Отложим на единичной окружности дугу $\widetilde{\mathrm{AC}}$ длиной α, которой соответствует центральный угол α (рис. 3). Тогда $\sin\alpha = \mathrm{BC}$. Отрезок BC является катетом прямоугольного треугольника $\triangle\mathrm{ABC}$ с гипотенузой AC, так что $\mathrm{BC} \leqslant \mathrm{AC}$. С другой стороны, отрезок AC является хордой, стягивающей дугу окружности $\widetilde{\mathrm{AC}}$ и соответственно, $\mathrm{AC} < \widetilde{\mathrm{AC}}$. Отсюда заключаем, что $\mathrm{BC} < \widetilde{\mathrm{AC}}$ и формула (17) доказана. Равенство в ней имеет место лишь при $\alpha = 0$.

Для доказательства непрерывности функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ воспользуемся определением Коши (13). Рассматривая разности

$$|\sin x - \sin x_0| \text{ и } |\cos x - \cos x_0|,$$

[4]Скажем лишь, что все выкладки в этом случае основаны на алгебраической формуле разности n-ых степеней: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, где в качестве числа n выбирается знаменатель рациональной дроби p. Впрочем, ниже мы покажем непрерывность степенной функции с произвольным показателем, рассматривая её как суперпозицию экспоненты и логарифма.

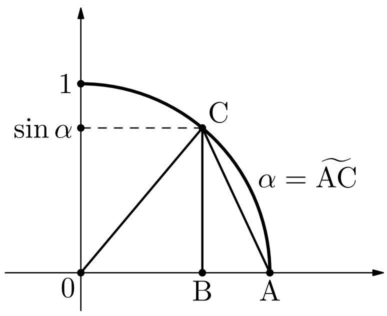

Рис. 3: К неравенству $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$.

вспомним тригонометрические формулы

$$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\tfrac{x+x_0}{2}\sin\tfrac{x-x_0}{2},$$
$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\tfrac{x+x_0}{2}\sin\tfrac{x-x_0}{2}.$$

Тогда из неравенства (17) получаем

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|, \quad |\cos x - \cos x_0| \leqslant |x - x_0|. \tag{18}$$

Далее, в (13) накладывается условие $|x - x_0| < \delta$. Отсюда видно, что если положить $\delta < \varepsilon$ (например, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$), то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall x\, (|x - x_0| < \delta = \tfrac{\varepsilon}{2}): \quad |\sin x - \sin x_0| < |x - x_0| < \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

и аналогичное условие справедливо для $f(x) = \cos x$. Тем самым доказана непрерывность синуса и косинуса.

Теперь на основании формулы $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ мы можем утверждать, что функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ непрерывна всюду, кроме точек $\frac{\pi}{2} + \pi n$. Аналогично, функция $f(x) = \operatorname{ctg} x$ непрерывна всюду, кроме точек πn.

Для доказательства непрерывности обратных тригонометрических функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ нам достаточно будет сослаться на следующую теорему:

> *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке. Тогда обратная к ней функция $f^{-1}(x)$ на соответствующей области определения также непрерывна и строго монотонна.*

Доказательство её можно найти, например, в [4] т. 1, гл. II, § 5, п. 83.

Непрерывность логарифмической и показательной функций будем доказывать на основании формулировки (15).

Положим сначала $f(x) = \ln x$. Условие непрерывности примет вид

$$\ln x_0 - \varepsilon < \ln(x_0 - \delta) < \ln(x_0 + \delta) < \ln x_0 + \varepsilon.$$

В силу $\delta > 0$ и монотонности логарифма всегда $\ln(x_0 - \delta) < \ln(x_0 + \delta)$. Остаётся система неравенств

$$\begin{cases} \ln(x_0 - \delta) > \ln x_0 - \varepsilon \\ \ln(x_0 + \delta) < \ln x_0 + \varepsilon \end{cases}.$$

Потенцируя, находим её решение:

$$\begin{cases} \delta < x_0(1 - \frac{1}{e^\varepsilon}) \\ \delta < x_0(e^\varepsilon - 1) \end{cases}.$$

Отсюда видно, что для $f\big(\mathrm{S}_\delta(x_0)\big) \subset \mathrm{S}_\varepsilon(f(x_0))$ достаточно выполнения условия

$$\delta < x_0 \cdot \min\big\{1 - e^{-\varepsilon}, e^\varepsilon - 1\big\}.$$

Аналогично рассматривается случай $f(x) = e^x$. Полагая $\varepsilon < e^{x_0}$, получаем условие

$$e^{x_0} - \varepsilon < e^{x_0 - \delta} < e^{x_0 + \delta} < e^{x_0} + \varepsilon.$$

Деля его на e^{x_0} и логарифмируя, приходим к выводу

$$\delta < \ln\left(\min\big\{1 - \frac{\varepsilon}{e^{x_0}}, 1 + \frac{\varepsilon}{e^{x_0}}\big\}\right) = \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{e^{x_0}}\right).$$

Итак, показательная и логарифмическая функции непрерывны всюду на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^+$ соответственно. Отсюда, в свою очередь, следует непрерывность гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$, в также обратных к ним $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$ и $\operatorname{Arcth} x$.

Далее, на основании свойств логарифмов

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0;$$
$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln x}, \quad a \in \mathbb{R},$$

и обе эти функции также оказываются непрерывными, будучи образованы суперпозициями экспоненты и логарифма.

Практически, рассуждениями этого параграфа мы обосновали простое, но очень важное утверждение:

Элементарные функции являются непрерывными во всех тех точках, где они определены и конечны.

Явным образом были решены задачи **№ 481(а,б,в)** и **№ 674(б,в,г,е,ж)**. Остаток задачи **№ 674** рекомендуется разобрать самостоятельно.

3. Односторонние пределы

Возьмём определение Гейне и заменим в нём условие $x_0 \neq x_n \to x_n$ одним из двух менее слабых:

$$x_0 < x_n \to x_0 \text{ или } x_0 > x_n \to x_0.$$

Сверх того, откажемся от условия $x_n \in \mathrm{S}_d(x_0) \subset A$ и заменим его на $x_n \in A$. Тогда вместо исходных условий Гейне получим

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} (x_0 < x_n \to x_0, x_n \to x_0): \quad f(x_n) = X_n \to X_0; \tag{19}$$

$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} (x_0 > x_n \to x_0, x_n \to x_0): \quad f(x_n) = X_n \to X_0; \tag{20}$$

Очевидно, что если выполнены условия (5), то выполняется и любое из условий (19)–(20), однако обратное неверно. Зато, с другой стороны, условия (19), (20) можно формулировать для случаев, когда (5) неприменимо — например, если x_0 является граничной точкой множества $A \subset \mathbb{R}$.

Говорят, что условие (19) определяет X_0 как *правый* предел $f(x)$ при $x \to x_0$, а условие (20) — как *левый* предел. Их обозначения имеют вид

$$X_0 = f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \text{ и}$$

$$X_0 = f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

соответственно. Если же $x_0 = 0$, то как правило, вместо "$0+0$" и "$0-0$" пишут просто "$0+$" и "$0-$".

Рассмотрим, например, функцию $\operatorname{sgn} x$ (7). Если положить $x_0 = 0$, то в условии (19) из-за $0 < x_n$ будем всегда получать $X_n \equiv 1$, а в условии (20) из-за $0 > x_n$ — $X_n \equiv -1$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1, \qquad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1,$$

и ни один из этих пределов не совпадает со значением функции $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Аналогично,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Из (5) и (19)–(20) следует очевидная теорема:

Для того, чтобы функция имела предел в точке, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела совпадающие левый и правый пределы:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = X_0 \iff \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = X_0. \tag{21}$$

Для записи односторонних пределов по Коши понадобятся дополнительные обозначения:

$$\mathrm{S}_\varepsilon^+(x_0) = \{y:\ x_0 \leqslant y < x_0+\varepsilon\}; \quad \hat{\mathrm{S}}_\varepsilon^+(x_0) = \mathrm{S}_\varepsilon^+(x_0)\setminus\{x_0\};$$
$$\mathrm{S}_\varepsilon^-(x_0) = \{y:\ x_0-\varepsilon < y \leqslant x_0\}; \quad \hat{\mathrm{S}}_\varepsilon^-(x_0) = \mathrm{S}_\varepsilon^-(x_0)\setminus\{x_0\}.$$

Дальнейшая модификация формулировок (8)–(10) представляется достаточно очевидной и её рекомендуется проделать самостоятельно. Фактически, это задачи **№ 403** и **№ 407**.

В качестве нетривиального примера на односторонний предел можно рассмотреть **№ 510**, где требуется найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0} \left[\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x}.$$

Представим функцию в экспоненциальном виде:

$$\left[\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x} = \exp\left\{\operatorname{tg} 2x \cdot \ln\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{8}+x)\right\}.$$

В силу непрерывности экспоненты достаточно исследовать её показатель. Пусть $x \to \frac{\pi}{4}+0$, тогда $\operatorname{tg} 2x \to -\infty$ и $\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}+x) \to \ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} \approx 0.88$. Весь показатель представляет собой выражение вида $C\cdot(-\infty)$, где $C = \mathrm{const} > 0$, и стремится к отрицательной бесконечности. Тогда экспонента на основании (16) стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0} \left[\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x} = 0.$$

Рекомендуется самостоятельно найти похожий предел

$$\lim_{x\to\pi+0}(\sin^2 x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

В заключение заметим, что свойства «обычных» пределов без изменений или с минимальными изменениями переносятся на односторонние пределы. Кроме того, по аналогии с (11) вводят понятие *непрерывности слева и справа.* На их основании формулируется аналог критерия (19): для того, чтобы функция была непрерывна в точке, необходимо и достаточно, чтобы она в ней была непрерывна как слева, так и справа.

4. Критерий Коши существования предела

В теории числовых последовательностей мы рассматривали критерий Коши [1] § 5, который позволял решать вопрос о существовании или несуществовании предела без его явного нахождения.

Аналогичный критерий существует и для предела функции. Звучит он следующим образом: *функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x_1,x_2\in\hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0):\quad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon. \tag{22}$$

Эта формулировка годится и для случая $x_0=\pm\infty$, необходимо лишь правильно записывать окрестность $\hat{\mathrm{S}}_\delta(\pm\infty)$. Если же x_0 является конечным числом, то (22) разворачивается в условие

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x_1,x_2\,\big(0<|x_1-x_2|<\delta\big):\quad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon. \tag{23}$$

Применение критерия Коши рассмотрим на примере функции $f(x)=x\operatorname{sgn}x$. Покажем, что в точке $x_0=0$ она имеет конечный предел. Для этого положим $\Delta=x_2-x_1$, так что $x_2=x_1+\Delta$, где $|\Delta|<2\delta$ (это следует из того, что точки x_1 и x_2 лежат внутри интервала $(-\delta,\delta)$ длиной 2δ). Пользуясь этим обозначением, записываем

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=|x_1\operatorname{sgn}x_1-x_2\operatorname{sgn}x_2|=|x_1\operatorname{sgn}x_1-(x_1+\Delta)\operatorname{sgn}x_2|\leqslant\\&\leqslant|x_1|\cdot|\operatorname{sgn}x_1-\operatorname{sgn}x_2|+|\Delta|\cdot|\operatorname{sgn}x_2|\leqslant 2\delta+2\delta=4\delta.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались теми фактами, что $|\operatorname{sgn}x|\leqslant 1$, $|x_2|\leqslant\delta$ и $|\operatorname{sgn}x_1-\operatorname{sgn}x_2|\leqslant 2$ (см. рис. 1).

Таким образом, если $4\delta<\varepsilon$, то условие (22) выполняется. Можно, например, записать

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\tfrac{\varepsilon}{5}\quad\forall x_1,x_2\in\mathrm{S}_\delta(0):\quad|\operatorname{sgn}x_1-\operatorname{sgn}x_2|\leqslant 4\delta<\tfrac{4}{5}\varepsilon<\varepsilon$$

и конечный предел $\lim_{x\to0}x\operatorname{sgn}x$ существует.

Зная наверняка о его существовании, найти этот предел совсем нетрудно. Прибегнем к определению Гейне «наоборот»: возьмём какую-нибудь *конкретную* последовательность $x_n\to0$, составим по ней последовательность $X_n=x_n\operatorname{sgn}x_n$ и найдём её предел. Он обязан существовать и при этом *не зависеть* от выбора x_n. Допустим, $x_n=\frac{1}{n}$, тогда $x_n>0$ и

$$X_n=x_n\operatorname{sgn}x_n=\frac{1}{n}\operatorname{sgn}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\to0.$$

На самом деле, как и в случае с последовательностями, критерий Коши больше подходит для доказательства того, что предел функции в точке *не существует*. Так, например, для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ при $x_0 = 0$ можно записать

$$\exists\varepsilon = 1 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in \hat{\mathrm{S}}_\delta(0)\ (x_1 = \tfrac{\delta}{2}, x_2 = -\tfrac{\delta}{2}): \quad |\operatorname{sgn} x_1 - \operatorname{sgn} x_2| = 2 > \varepsilon,$$

и это в точности совпадает с отрицанием условий (22)–(23).

Заметим наконец, что с использованием обозначений $\hat{\mathrm{S}}^+_\delta(x_0)$ и $\hat{\mathrm{S}}^-_\delta(x_0)$ не составляет труда переписать критерий Коши для существования односторонних пределов. Кроме того, если в условии (22) заменить проколотую окрестность $\hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0)$ на обычную $\mathrm{S}_\delta(x_0)$, то получится критерий Коши *для непрерывности функции в точке*.

5. Алгебраическое раскрытие неопределённостей

Понятие неопределённости при вычислении пределов хорошо объяснено у Коши в [6], соответствующая цитата звучит следующим образом:

> *Иногда пределы, к коим приближаются переменные выражения, представляются в неопределённом виде; несмотря на сие, они имеют однако же совершенно определённые величины, которые можно найти посредством различных приёмов.*

В этом параграфе мы рассмотрим раскрытие неопределённостей посредством алгебраических преобразований, и чаще всего нам придётся для этого пользоваться формулой разности n-ых степеней:

$$(a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \tag{24}$$

Кроме того, понадобится следующий факт: если для некоторого полинома число x_0 является корнем, то этот полином нацело делится на $(x - x_0)$.

Вооружившись этим знанием, решим задачу **№ 411**, где нужно найти предел функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

для трёх различных точек: при $x \to 0$, $x \to 1$ и $x \to \infty$.

В первом случае неопределённости не возникает вообще: числитель и знаменатель стремятся[5] к (-1), так что пределом оказывается единица. Во втором случае, пытаясь подставить в числитель и знаменатель $x = 1$, получаем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы избавиться от неё, разложим числитель и знаменатель на множители:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)},$$

так что

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

[5]Вспомним, что функция $f(x)$ непрерывна, являясь отношением двух непрерывных функций (в данном случае полиномов).

В третьем случае сразу получаем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. От неё можно избавиться, поделив числитель и знаменатель дроби на x^2:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\,.$$

Теперь числитель стремится к единице, знаменатель к двойке, так что предел оказывается равным $\frac{1}{2}$.

Заметим, что приём вынесения x в наибольшей степени является общим при вычислении пределов дробно-рациональных функций на бесконечности. Именно так решается задача **№ 409**.

Полностью аналогично решаются задачи **№ 412–413, 415–416, 418–423**. Зная общий принцип, в них даже совершенно не обязательно раскрывать до конца скобки — так, в задаче **№ 416** можно записать

$$\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{(2^{20}x^{20}+ax^{19}+\ldots+b)(3^{30}x^{30}+cx^{29}+\ldots+d)}{2^{50}x^{50}+px^{49}+\ldots+q} = \frac{2^{20}3^{30}x^{50}+\ldots}{2^{50}x^{50}+\ldots}\,.$$

Здесь за многоточиями скрываются степени x ниже 50-й, причём таких слагаемых конечное число. Деля числитель и знаменатель на x^{50}, мы обратим их в бесконечно малые и тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30} \approx 1.9\cdot 10^5.$$

Более интересны задачи общего вида. Например, **№ 425** решается непосредственным применением формулы (24):

$$\frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)} = \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1}\,.$$

Здесь числитель содержит m слагаемых, а знаменатель — n, причём каждое из них при $x\to 1$ стремится к единице, так что

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{m}{n}\,.$$

Задача **№ 414** сложнее. Чтобы найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\,,$$

преобразуем сначала числитель по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}&(1+mx)^n-(1+nx)^m = \mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1 mx+\mathrm{C}_n^2 m^2x^2+\ldots+\mathrm{C}_n^n m^n x^n-\\ &-\mathrm{C}_m^0-\mathrm{C}_m^1 nx-\mathrm{C}_m^2 n^2x^2-\ldots-\mathrm{C}_m^m n^m x^m = 1+nmx+\tfrac{n(n-1)}{2}m^2x^2+\ldots+m^nx^n-\\ &-1-mnx-\tfrac{m(m-1)}{2}n^2x^2-\ldots-n^mx^m = \tfrac{1}{2}nm(n-m)x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_px^p.\end{aligned}$$

Здесь константы a_i выражаются через биномиальные коэффициенты, а $p=\max(n,m)$. Деля этот результат на x^2, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{nm}{2}(n-m)+a_3x+\ldots+a_px^{p-2}\right) = \frac{nm}{2}(n-m).$$

Ещё сложнее задача **№ 426**, в которой нужно найти предел

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}\,.$$

Сначала преобразуем разность x^n-a^n в числителе по формуле (24) и вынесем общий множитель $(x-a)$:

$$\begin{aligned}(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)&=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}-na^{n-1})=\\&=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x-(n-1)a^{n-1}).\end{aligned}$$

Далее сократим всю дробь на $(x-a)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x-(n-1)a^{n-1}}{x-a}\,.$$

Видно, что неопределённость $\frac{0}{0}$ ещё остаётся. Значит, числитель должен нацело делиться на знаменатель. Действительно,

$$\begin{array}{l|l}
x^{n-1}+ax^{n-2}+\ a^2x^{n-3}+\ldots\quad\ldots+a^{n-2}x-(n-1)a^{n-1} & x-a\\
\cline{2-2}
x^{n-1}-ax^{n-2} & x^{n-2}+2ax^{n-3}+3a^2x^{n-4}+\\
\qquad 2ax^{n-2}+\ a^2x^{n-3} & +\ldots+(n-1)a^{n-2}\\
\qquad 2ax^{n-2}-2a^2x^{n-3} & \\
\qquad\qquad 3a^2x^{n-3}+\ldots & \\
\qquad\qquad 3a^2x^{n-3}+\ldots & \\
\qquad\qquad\qquad\ldots & \\
\qquad\qquad\qquad (n-1)a^{n-2}x-(n-1)a^{n-1} & \\
\qquad\qquad\qquad (n-1)a^{n-2}x-(n-1)a^{n-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

В результате деления получился полином — всюду непрерывная функция, — так что

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}&=a^{n-2}+2a^{n-2}+3a^{n-2}+\ldots+(n-1)a^{n-2}=\\&=a^{n-2}\big(1+2+3+\ldots+(n-1)\big)=\tfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.\end{aligned}$$

Пара задач **№ 424** и **№ 427** на самом деле представляет собой одно и то же. Чтобы увидеть это, начнём с **№ 427** и преобразуем числитель:

$$\begin{aligned}x^{n+1}-(n+1)x+n&=x^{n+1}-nx-x+n=x(x^n-1)-n(x-1)=\\&=x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)-n(x-1)=\\&=(x-1)(x^n+x^{n-1}+\ldots+x-n),\end{aligned}$$

и вся функция оказывается равной

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\frac{x^n+x^{n-1}+\ldots+x-n}{x-1}\,,$$

а это в точности совпадает с функцией из **№ 424**. Сокращая дробь точно как в **№ 426**, получаем

$$\frac{x^n+x^{n-1}+\ldots+x-n}{x-1}=x^{n-1}+2x^{n-2}+\ldots+(n-1)x+n.$$

Здесь n слагаемых, в каждом из которых x^k стремится к единице при $x \to 1$, так что

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n+x^{n-1}+\ldots+x-n}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Перейдём теперь от полиномов к радикалам — т.е., от натуральных показателей степеней к рациональным. Как оказывается, в этом случае тоже можно раскрывать неопределённости алгебраическими преобразованиями. Например, в задаче **№ 442** сразу применима формула (24):

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)}=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\frac{1}{4}\,.$$

Аналогично, в задаче **№ 437** записываем

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2x-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)}\,.$$

Теперь применяем к числителю формулу (24), получаем $2x-8=2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$ и тогда

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}\,.$$

Заметим, что во всех подобных задачах возможно выделить множитель, отвечающий за возникновение неопределённости[6] в числителе и знаменателе, явным образом. Так, например, если в задаче **№ 455** умножить числитель и знаменатель на

$$\left(x^{(m-1)/m}+x^{(m-2)/m}+\ldots+x^{1/m}+1\right)\left(x^{(n-1)/n}+x^{(n-2)/n}+\ldots+x^{1/n}+1\right),$$

то можно заметить, что первый сомножитель позволяет воспользоваться формулой (24) в числителе, а второй — в знаменателе. Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{(n-1)/n}+x^{(n-2)/n}+\ldots+x^{1/n}+1)}{(x-1)(x^{(m-1)/m}+x^{(m-2)/m}+\ldots+x^{1/m}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^{(n-1)/n}+x^{(n-2)/n}+\ldots+x^{1/n}+1)}{(x^{(m-1)/m}+x^{(m-2)/m}+\ldots+x^{1/m}+1)}=\frac{n}{m}\,.$$

Здесь соответствующим множителем был $(x-1)$.

Точно так же в задаче **№ 443**, где $x\to8$, можно исключить сингулярность $(x-8)$:

$$\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{2(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)}\,.$$

Сокращая дробь, получаем искомый предел:

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to8}\frac{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt{9+2x}+5)}=\frac{12}{5}\,.$$

В задаче **№ 454** положим $A=\sqrt[m]{1+P(x)}$ и приведём числитель по формуле (24) к разности A^n-1. Для этого домножим и разделим дробь на

$$A^{m-1}+A^{m-2}+\ldots+A+1.$$

[6] Говорят ещё «множитель, вызывающий сингулярность».

Заметим, что по условию $A = \sqrt[m]{1+P(x)} \to 1$ при $x \to 0$ (так как в полиноме $P(x)$ нет свободного коэффициента). Дробь преобразуется к виду

$$\frac{A^m - 1}{x(A^{m-1} + A^{m-2} + \ldots + A + 1)} = \frac{P(x)}{x} \cdot \frac{1}{A^{m-1} + A^{m-2} + \ldots + A + 1}\,.$$

Учитывая вид полинома $P(x)$, и тот факт, что $A \to 1$ получаем отсюда

$$\lim_{x\to 0} \frac{A-1}{x} = \frac{a_1}{m}\,.$$

Отметим ещё, что в этой задаче можно положить $P(x) = x$ (соответственно, $a_1 = 1$) и тогда сразу получается решение **№ 444**.

Задача **№ 452** очень похожа на **№ 414**. Положим в ней $A = \sqrt[m]{1+\alpha x}$ и $B = \sqrt[n]{1+\beta x}$, после чего воспользуемся формулой (24) так, чтобы получить в числителе разность $A^{nm} - B^{mn}$:

$$\frac{A-B}{x} = \frac{1}{(A^{mn-1} + A^{mn-2}B + \ldots + B^{mn-1})} \cdot \frac{A^{mn} - B^{mn}}{x}\,.$$

Нетрудно заметить, что $A \to 1$ и $B \to 1$ при $x \to 0$, так что первый сомножитель имеет своим пределом $\frac{1}{mn}$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{1}{mn} \lim_{x\to 0} \frac{(1+\alpha x)^n - (1+\beta x)^m}{x}\,.$$

Далее раскрываем скобки в числителе, пользуясь биномом Ньютона, как в **№ 414**:

$$(1+\alpha x)^n - (1+\beta x)^m = 1 + n\alpha x + \ldots - 1 - m\beta x - \ldots = (n\alpha - m\beta)x + \ldots$$

Здесь за многоточиями скрываются слагаемые со степенями x выше первой, число которых конечно. Деля это выражение на x, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{n\alpha - m\beta}{mn} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}\,.$$

Наконец, задача **№ 436** решается совершенно так же, как **№ 411(в)** — сокращением на старшую степень:

$$\frac{x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}}{(2x+1)^{1/2}} = \frac{1 + \frac{1}{x^{1/6}} + \frac{1}{x^{1/2}}}{(2 + \frac{1}{x^{1/2}})^{1/2}}\,.$$

При $x \to +\infty$ числитель стремится к единице, знаменатель к $\sqrt{2}$, так что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Пользуясь описанными приёмами, рекомендуется самостоятельно решить задачи **№ 413, 415, 423, 424.1, 445, 446, 448, 457, 458, 459, 462, 466, 467**.

6. Замечательные пределы

В этом параграфе мы установим два очень важных предела, которые носят название *замечательных*. Один из них для случая дискретного изменения аргумента (последовательности) был уже получен в [1] § 6; здесь мы выведем его в самом общем виде.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится неравенство (17) и похожее на него

$$|\operatorname{tg}\alpha| \geqslant |\alpha| \text{ при } |\alpha| < \tfrac{\pi}{2}\,. \tag{25}$$

Его достаточно показать при $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ из-за нечётности функций; соответствующая иллюстрация приведена на рис. 4.

На единичной окружности отложена дуга $\widetilde{\mathrm{AC}}$ длиной α, соответствующая центральному углу $\angle\mathrm{AOC} = \alpha$ (в радианах). Тогда $\mathrm{AB} = \operatorname{tg}\alpha$. Рассматривая площади, можно записать

$$S(\sphericalangle\mathrm{O}\widetilde{\mathrm{AC}}) \leqslant S(\triangle\mathrm{AOB}),$$

где равенство имеет место лишь при $\alpha = 0$. Здесь треугольник $\triangle\mathrm{AOB}$ имеет основание $\mathrm{AO} = 1$ и высоту $\mathrm{AB} = \operatorname{tg}\alpha$, а $\sphericalangle\mathrm{O}\widetilde{\mathrm{AC}}$ — это сектор круга с раствором центрального угла $\angle\mathrm{AOC} = \alpha$ и радиусом $\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = 1$, так что

$$S(\sphericalangle\mathrm{O}\widetilde{\mathrm{AC}}) = \frac{\alpha}{2}\,, \quad S(\triangle\mathrm{AOB}) = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\,.$$

Отсюда и следует неравенство (25).

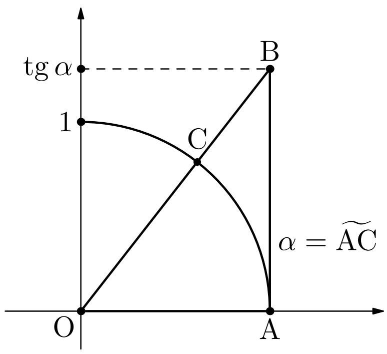

Рис. 4: К неравенству $|\operatorname{tg}\alpha| \geqslant |\alpha|$.

Будем теперь полагать, что $x \to 0$ при $x \in \hat{\mathrm{S}}_{\frac{\pi}{2}}(0)$. Тогда, с одной стороны, из нечётности функций и неравенства (17) можно записать

$$1 = \frac{\sin x}{\sin x} \geqslant \frac{\sin x}{x}\,. \tag{26}$$

С другой стороны, из той же нечётности и неравенства (25) записываем

$$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \cos x. \tag{27}$$

Объединяя (26) и (27), получаем неравенство

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1.$$

Вспоминая, что $\cos x \to 1$ при $x \to 0$ по непрерывности косинуса, получаем отсюда по теореме «о двух милиционерах» *первый замечательный предел*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{28}$$

Вторым замечательным пределом называют выражение

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \tag{29}$$

частный случай которого нам уже знаком. Действительно, в [1] § 6 мы показали, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{30}$$

а (30) получается из (29) при $x_n = \frac{1}{n}$. На самом деле имеет место более сильное по сравнению с (30) утверждение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e, \qquad \text{где } p_n \in \mathbb{N},\ p_n \to +\infty. \tag{31}$$

Оно непосредственно вытекает из (30) и определения предела последовательности, этот факт рекомендуется доказать самостоятельно.

Рассматривая по Гейне последовательности $x_n \to 0$, не сводящиеся к случаю $\frac{1}{n}$, будем для определённости полагать $|x_n| < 1$. Положим $f(x) = (1+x)^{1/x}$ и проанализируем для начала случай $x > 0$.

Итак, выберем произвольно последовательность x_n, такую что $0 < x_n \to 0$ и $1 > x_n$. Построим по ней ещё одну последовательность p_n следующим образом:

$$p_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor = \max\{m \in \mathbb{N} :\ m \leqslant \tfrac{1}{x_n}\}, \quad \text{так что } \frac{1}{p_n+1} \leqslant x_n < \frac{1}{p_n}\,.$$

Тогда, заменяя в функции $f(x)$ основание и показатель степени на бóльшие величины, записываем

$$X_n = f(x_n) \leqslant \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1}. \tag{32}$$

С другой стороны, заменяя их меньшими величинами, получаем

$$X_n = f(x_n) \geqslant \left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n-1}. \tag{33}$$

Объединяем (32) и (33):

$$\left(1+\frac{1}{p_n+1}\right)^{p_n-1} \leqslant X_n = f(x_n) \leqslant \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n+1},$$

откуда, пользуясь (31), получаем по «двум милиционерам» правосторонний предел

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{34}$$

Далее анализируем случай $0 > x > -1$. Замечая, что при этом $1+x > 0$, можно записать

$$1+x = \frac{1}{1+y}, \text{ где } 0 < y < 1. \tag{35}$$

Выражаем отсюда

$$x = -\frac{y}{1+y} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = -\frac{1+y}{y}\,.$$

Подставляя эти выражения в $f(x)$, переходим к функции $f(y)$:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{1+y}\right)^{-\frac{1+y}{y}} = (1+y)^{\frac{1}{y}+1} = \underbrace{(1+y)^{\frac{1}{y}}(1+y)}_{f(y)}.$$

Теперь заметим из (35), что если $x \to 0-$, то $y \to 0+$ и стало быть,

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \underbrace{\lim_{y\to 0+}(1+y)^{\frac{1}{y}}}_{e} \cdot \underbrace{\lim_{y\to 0+}(1+y)}_{1} = e. \tag{36}$$

Объединение односторонних пределов (34) и (36) даёт, наконец, замечательный предел (29).

Если в выражении (29) выполнить замену переменной $t = \frac{1}{x}$, то мы получим альтернативную форму второго замечательного предела:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e. \tag{37}$$

Авторы некоторых учебников доказывают в качестве основного варианта именно формулу (37)[7]. Рекомендуется проделать такое доказательство самостоятельно, опираясь только на (30)–(31) и не пользуясь пределами (29), (34), (36).

Наконец, зная формулы (29) и (37), мы можем вывести более общие выражения

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^{a}; \tag{38}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}, \tag{39}$$

которыми уже пользовались в [2].

Для этого в формуле (38) нужно выполнить замену $t = ax$. Тогда, если $x \to 0$, то и $t \to 0$; при этом $\frac{1}{x} = \frac{a}{t}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{a}{t}} = \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{a} = e^{a}.$$

Аналогично, в (39) нужно положить $t = \frac{a}{x}$.

7. Пределы, сводящиеся к замечательным

Формулы (28)–(29) и (37)–(39) позволяют найти множество сводящихся к ним пределов, многие из которых, как мы увидим ниже, оказываются весьма полезными.

Особое внимание при нахождении таких пределов следует обращать на точку x_0. Так, предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

в задаче **№ 472** очень похож на (28), однако в нём $x \to \infty$, а не $x \to 0$, и формула (28) здесь неприменима. На самом деле этот предел равен нулю, так как функция $\sin x$ ограничена, а функция $\frac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \to \infty$.

[7] Здесь замечательные пределы были изложены так же, как у Коши в [6], только с бóльшими подробностями и, естественно, в современных обозначениях.

Частным случаем предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}$$

при $a=5$ оказывается задача **№ 471**. Этот предел находится очень просто:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\{t=ax\}=a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=a.$$

Похожий предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^a x}{x^b}$$

оказывается более сложным. Очевидно, что при $a=b$ он равен единице. Вторым возможным случаем является $a>b$. Положим $a=b+p$, где $p>0$. Тогда

$$\frac{\sin^a x}{x^b}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^b\sin^p x.$$

Здесь первый сомножитель стремится к единице, а второй к нулю, так что и общий ответ будет нулевым. Для третьего случая $b>a$ положим $b=a+p$, $p>0$:

$$\frac{\sin^a x}{x^b}=\frac{1}{x^p}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^b.$$

Здесь первый сомножитель стремится к бесконечности, а второй к единице, так что результат оказывается бесконечным. Окончательно записываем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^a x}{x^b}=\begin{cases}1, & a=b\\ 0, & a>b\\ \infty, & a<b\end{cases}.$$

Далее рассмотрим важный предел из задачи **№ 474(б)**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Здесь переход от предела произведения к произведению пределов корректен, так как каждый из сомножителей справа имеет конечный предел.

Очень похожий предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

находится при помощи замены $x=\operatorname{tg} t$ (причём если $x\to 0$, то и $t\to 0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t}=\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}\right)^{-1}=1. \tag{40}$$

Конечно, равенство $\operatorname{arctg}\operatorname{tg} t=t$ предполагает, что $|t|<\frac{\pi}{2}$, однако при $t\to 0$ это можно считать само собой разумеющимся.

Точно таким же способом находится предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,$$

и теперь мы можем записать цепочку равенств

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x}=1.$$

Очень интересна задача **№ 473**, где просят найти предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}\,,\qquad m,n\in\mathbb{Z}.$$

Чтобы свести его к формуле (28), выполним сначала замену $x=t+\pi$, где $t\to 0$ и далее воспользуемся тригонометрическими соотношениями:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(mt+m\pi)}{\sin(nt+n\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt\cos m\pi+\cos mt\sin m\pi}{\sin nt\cos n\pi+\cos nt\sin n\pi}\,.$$

Теперь вспоминаем, что $n,m\in\mathbb{Z}$. Тогда $\sin m\pi=\sin n\pi\equiv 0$, $\cos m\pi=(-1)^m$ и $\cos n\pi=(-1)^n$:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=(-1)^{m-n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt}{\sin nt}=(-1)^{m-n}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\sin mt}{t}\right)}{\left(\frac{\sin nt}{t}\right)}=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}\,.$$

Заметим, что мы попутно получили предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}\tag{41}$$

из задачи **№ 1318**, и здесь числа m,n даже не обязаны быть целыми.

Аналогично, посредством тригонометрических преобразований, можно решить задачи **№ 475–478** и **№ 482–485**.

В задаче **№ 475** запишем $\operatorname{tg}x$ в виде$\frac{\sin x}{\cos x}$:

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\sin^3 x}=\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}=$$
$$=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\sin^2 x}=\frac{2}{\cos x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}\right)^2.$$

Теперь, устремляя $x\to 0$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}\right)^2=2\cdot\tfrac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Задача **№ 476** более проста:

$$\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\frac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=2\cos 4x,$$

и соответственно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=2.$$

В задаче **№ 482** совместно с тригонометрическими преобразованиями нужна замена $x-a=t$ при $t\to 0$:

$$\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\,,$$

и тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=2\lim_{x\to a}\cos\tfrac{x+a}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}=2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\cos a=\cos a.$$

Остаток перечисленных задач **№ 477–478** и **№ 483–485** рекомендуется решить самостоятельно.

Задачи типа **№ 488** решаются длинными, но несложными выкладками:

$$\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin(a)}{x^2}=\frac{[\sin(a+2x)-\sin(a+x)]-[\sin(a+x)-\sin a]}{x^2}=$$
$$=\frac{2\cos(a+\frac{3x}{2})\sin\frac{x}{2}-2\cos(a+\frac{x}{2})\sin\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{\cos(a+\frac{3x}{2})-\cos(a+\frac{x}{2})}{x}=$$
$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{-2\sin(a+x)\sin\frac{x}{2}}{x}=-4\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2\sin(a+x).$$

Устремляя здесь $x\to 0$ и применяя результат задачи **№ 471**, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}=-\sin a.$$

Аналогичные задачи **№ 489–491** стоит разобрать самостоятельно; в качестве упражнений рекомендуются также задачи **№ 474(а,в)** и **№ 499**.

Задачи, сводящиеся к пределам (38)–(39), более разнообразны. В качестве простейших случаев упомянем **№ 512, 514, 515**. В первой из них выполним замену $t=x^2$ и тогда $t\to+\infty$ при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t-2}\right)^t=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{3}{t-2}\right)^t=e^3.$$

Рекомендуется перечитать [2] § 4 в той части, которая касается решения задачи **№ 2589.2** — там обсуждается важный момент, связанный с корректностью применения замечательного предела в подобных выражениях.

Предел в **№ 514** ещё более прост, он основан на непосредственном применении формулы (38):

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim_{x\to 0}\bigl(1+(-2)x\bigr)^{\frac{1}{x}}=e^{-2}.$$

В **№ 515** аналогично **№ 512** записываем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x+a}\right)^x=e^{2a}.$$

Задача **№ 529** основана на теореме о суперпозиции непрерывных функций (16):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

Более общей формой этого предела является формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}\,, \tag{42}$$

которая доказывается совершенно аналогично.

В **№ 541**, где нужно найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\,,\qquad a>0,$$

выполним замену $t = a^x - 1$, тогда $t \to 0$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\log_a(1+t)}{t}\right)} = \ln a$$

в свете предыдущего результата (42). В частности, при $a = e$ получаем важный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Из **№ 529** можно получить ещё один интересный предел (задача **№ 531**):

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}\,.$$

Здесь оказывается полезной замена $t = x - a$, тогда $t \to 0$ при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(a+t) - \ln a}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{t}{a})}{t} = \frac{1}{a} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})} = \frac{1}{a}$$

согласно тому же результату (42).

Важным пределом является

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a, \qquad a \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

справедливость которого при $a \in \mathbb{N}$ легко устанавливается с помощью бинома Ньютона, а при $a \in \mathbb{Q}^+$ — посредством формулы (24). Это рекомендуется проделать самостоятельно, мы же сейчас рассмотрим самый общий случай.

Представим функцию под пределом в виде произведения

$$\frac{(1+x)^a - 1}{x} = \frac{(1+x)^a - 1}{\ln(1+x)^a} \cdot \frac{a\ln(1+x)}{x}\,.$$

Пределом второго сомножителя согласно (42) является число a. Чтобы найти предел первого сомножителя, сделаем в нём замену $(1+x)^a - 1 = t$, тогда $t \to 0$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{\ln(1+x)^a} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

Тем самым справедливость формулы (43) доказана. Её также иногда записывают в виде

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\big[(1+x)^{\frac{1}{a}} - 1\big]}{x} = 1.$$

Наконец, установим аналог формулы (28) для гиперболических функций. Рассматривая предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,,$$

воспользуемся определением гиперболического синуса:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} e^x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}\,.$$

Первый из пределов в правой части равен единице по непрерывности экспоненты, а второй — по формуле (42), так что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1,$$

и этим мы решили задачу **№ 576(а)**.

Предел для гиперболического тангенса

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x} = 1$$

из задачи **№ 576(в)** получается отсюда точно так же, как аналогичный предел для обычного тангенса в задаче **№ 474(б)**.

Пределы для обратных гиперболических функций

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arsh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arth} x}{x} = 1$$

могут быть легко установлены как через взаимно обратные подстановки $\operatorname{Arsh}\operatorname{sh} x = x$ и $\operatorname{Arth}\operatorname{th} x = x$, см. (40), так и по определению этих функций. Например,

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\big[\ln(1+x) - \ln(1-x)\big],$$

и тогда

$$\frac{\operatorname{Arth} x}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{(-x)}\right].$$

Здесь каждое из слагаемых в квадратных скобках стремится к единице при $x \to 0$. Аналогично устанавливается второй предел для функции $\operatorname{Arsh} x$; это рекомендуется проделать самостоятельно.

Для самостоятельного решения рекомендуются также задачи **№ 530, 532, 552, 576(б), 578(а,б), 549**.

8. Сравнение бесконечных

В [1] и [2] мы ввели для последовательностей отношения эквивалентности «$\sim$», пренебрежимой малости «$\ll$» и сопоставимости «$\asymp$». Последующие разделы этого параграфа будут посвящены обобщению их на случай функций и применению к вычислению пределов.

Теория и символика таких отношений были введены немецким математиком Э. Ландау; с тех пор появилось много альтернативных обозначений, авторы которых стремились подчеркнуть ту или иную смысловую составляющую. Некоторые из этих обозначений мы перечислим в таблице 1 и по мере необходимости будем пользоваться теми, которые удобнее в конкретной ситуации.

Во всех разделах параграфа будем помнить, что запись $x \to x_0$ предполагает согласно (1) рассмотрение функций в некоторой окрестности — возможно, односторонней — точки x_0. Будем также полагать, что при $x \to x_0$ сравниваемые функции являются *одновременно бесконечно большими или бесконечно малыми* — в противном случае обсуждаемая теория хоть и остаётся справедливой (и мы иногда будем приводить такие примеры), но становится практически ненужной.

$f=\boldsymbol{O}(g)$	$f=\boldsymbol{o}(g)$	$f\sim g$	$f\nsim g$
$f\lesssim g$	$f\ll g$	$f\cong g$	$f\asymp g$

Таблица 1: Альтернативные обозначения для символики Ландау.

8.1. Символика Ландау

Теория, стоя́щая за символикой Ландау (называемой также «о-символикой»), как правило, плохо осознаётся студентами, поэтому определения лучше всего запоминать в виде словесных формулировок. Мы начнём с понятия, аналога которому до сих пор не возникало:

> Говорят, что функция $f(x)$ *подчинена* функции $g(x)$ при $x\to x_0$, если вблизи точки x_0 функция $f(x)$ путём домножения на некоторую ненулевую константу может быть ограничена по сравнению с $g(x)$:
>
> $$\exists M>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0):\quad |f(x)|\leqslant M|g(x)|. \tag{44}$$
>
> Этот факт обозначают $f(x)\lesssim g(x)$ или $f=\boldsymbol{O}(g)$ при $x\to x_0$.

Из определения (44) можно сразу же сделать некоторые выводы. Во-первых, про любую функцию $f(x)$ в любой точке её определения x_0 можно утверждать, что $f=\boldsymbol{O}(f)$. Это следует из того, что при $M=1$ неравенство $|f(x)|\leqslant|f(x)|$ не вызывает никаких сомнений. Соответствующая запись вида $f(x)\lesssim f(x)$ также интуитивно понятна.

Во-вторых, если $f=\boldsymbol{O}(g)$ и $g=\boldsymbol{O}(\varphi)$, то $f=\boldsymbol{O}(\varphi)$ (задача **№ 646(г)**). Это следует из того, что при $|f(x)|\leqslant M_1|g(x)|$ и $|g(x)|\leqslant M_2|\varphi(x)|$ имеет место $|f(x)|\leqslant M_1M_2|\varphi(x)|$, если только $|x-x_0|<\min(\delta_f,\delta_g)$. Соответствующая запись

$$f\lesssim g\ \&\ g\lesssim\varphi\ \Rightarrow\ f\lesssim\varphi\quad\text{или}\quad \boldsymbol{O}(\boldsymbol{O}(\varphi))=\boldsymbol{O}(\varphi) \tag{45}$$

также вполне логична.

В-третьих, если положить $g(x)\equiv 1$, то условие (44) будет означать просто-напросто обыкновенную ограниченность $f(x)$ в некоторой окрестности x_0:

$$\exists M>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0):\quad |f(x)|\leqslant M.$$

Таким образом, записи «$f=\boldsymbol{O}(1)$» и «$f(x)$ есть ограниченная функция» означают одно и то же. (Обозначения вида «$f\lesssim 1$» стараются не использовать, так как смысл их неочевиден.)

В-четвёртых, из предыдущего рассуждения следует, что равенства с о-символикой несимметричны и их следует понимать лишь в одну сторону. Например — задача **№ 650(е)** — из неравенства $|\operatorname{arctg} x|\leqslant\frac{\pi}{2}$ следует, что

$$\operatorname{arctg}\tfrac{1}{x}=\boldsymbol{O}(1),\quad x\in\mathbb{R},$$

однако запись $\boldsymbol{O}(1)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ лишена смысла: ведь множество ограниченных функций отнюдь не исчерпывается $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; точно так же $\sin x=\boldsymbol{O}(1)$, $\cos x=\boldsymbol{O}(1)$ и т.п. Чтобы подчеркнуть этот факт, можно было бы записать длинное выражение вроде

$$\operatorname{arctg}\tfrac{1}{x}\in\{g(x):\ g=\boldsymbol{O}(1)\},$$

которое гораздо корректнее, но вместе с тем совершенно неудобно. Авторы некоторых учебников используют для наглядности такие обозначения, как

$$f\overset{\in}{=}\boldsymbol{O}(g)\quad\text{или}\quad f\overset{\rightarrow}{=}\boldsymbol{o}(g), \tag{46}$$

где стрелка во второй записи означает «левую часть можно заменить на правую, но не наоборот». Обозначение $f \lesssim g$ также хорошо подчёркивает этот факт. Если же (такие случаи бывают) речь идёт о совпадении множеств:

$$\{g = \boldsymbol{O}(\varphi)\} = \{g = \boldsymbol{O}(\psi)\},$$

то используют обозначения

$$\boldsymbol{O}(\varphi) \rightleftharpoons \boldsymbol{O}(\psi) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{O}(\varphi) \rightleftarrows \boldsymbol{O}(\psi). \tag{47}$$

Наконец, в-пятых, из (44) совершенно очевидно, что если $f = \boldsymbol{O}(g)$ и $C = \text{const}$, то $Cf = \boldsymbol{O}(g)$. Частным случаем этого утверждения, записываемого в виде

$$C\boldsymbol{O}(f) \rightleftharpoons \boldsymbol{O}(f), \quad \boldsymbol{O}(Cf) \rightleftharpoons \boldsymbol{O}(f),$$

являются задачи **№ 647(а)** и **№ 648(а)**.

Последнее замечание касается только удобства обозначений. Очень часто при работе со степенями пользуются следующими соглашениями:

$$\boldsymbol{O}\big((x-a)^n\big) \equiv \boldsymbol{O}(x-a)^n \quad \text{и} \quad \boldsymbol{O}^n(f) \equiv \big[\boldsymbol{O}(f)\big]^n. \tag{48}$$

Будем ими пользоваться и мы; особенно это касается записи первого вида.

Заканчивая рассуждения об отношении «$\boldsymbol{O}$», назовём задачи, рекомендуемые для самостоятельного решения. Это **№ 647(б,в)** и **№ 648(б,в)**; все они решаются по определению (44).

Далее мы рассмотрим понятие, являющееся обобщением отношения “$\ll$”, введённого в [2]. Сохраним за этим отношением прежнее название:

> Говорят, что функция $f(x)$ *пренебрежимо мала* по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$, если вблизи точки x_0 функция $f(x)$ путём домножения на ненулевую константу может быть сделана *сколь угодно* ограниченной по сравнению с $g(x)$. Этот факт обозначают $f(x) \ll g(x)$ или $f = \boldsymbol{o}(g)$ при $x \to x_0$.

Здесь по сравнению с условием (44) изменилось только одно: константу $M > 0$ можно выбирать произвольно. Соответственно,

$$f = \boldsymbol{o}(g), x \to x_0 \iff \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0): \quad |f(x)| \leqslant M|g(x)|. \tag{49}$$

Сопоставляя условия (44) и (49), можно сразу же сделать вывод, что если $f(x)$ и $g(x)$ находятся в отношении $f = \boldsymbol{o}(g)$, то они автоматически находятся и в отношении $f = \boldsymbol{O}(g)$:

$$f = \boldsymbol{o}(g) \;\Rightarrow\; f = \boldsymbol{O}(g) \quad \text{или} \quad f(x) \ll g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \lesssim g(x). \tag{50}$$

Чтобы обосновать это утверждение, достаточно в (49) просто выбрать M произвольным образом, найти соответствующее $\delta > 0$ и подставить эти числа в (44).

Все замечания, касающиеся обозначений (46)–(48) для символа «$\boldsymbol{O}$», остаются справедливыми и для символа «$\boldsymbol{o}$». Также остаётся в силе свойство транзитивности

$$f(x) \ll g(x) \;\&\; g(x) \ll \varphi(x) \;\Rightarrow\; f(x) \ll \varphi(x) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{o}(\boldsymbol{o}(\varphi)) = \boldsymbol{o}(\varphi), \tag{51}$$

доказываемое по аналогии с (45). Это доказательство составляет задачу **№ 646(а)**.

Далее, положим $g(x) \equiv 1$ и запишем для этого случая условие (49), которое примет вид

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0): \quad |f(x)| \leqslant M. \tag{52}$$

Как нетрудно видеть, с точностью до замены букв $M \leftrightarrow \varepsilon$, (52) совпадает с (9) при $X_0 = 0$, определяя тем самым формулу

$$f = \boldsymbol{o}(1), \quad x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Итак, запись $f = \boldsymbol{o}(1)$ означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ является бесконечно малой.(Запись $f(x) \ll 1$ при этом обычно не используется из-за неочевидности.)

Теперь заметим, что в отличие от отношения «$\boldsymbol{O}$», никакая функция $f(x)$ не находится сама с собой в отношении «$\boldsymbol{o}$». Единственным исключением является случай тождественного нуля $f(x) \equiv 0$. Этот факт, записываемый в виде

$$f = \boldsymbol{o}(f) \iff f(x) \equiv 0, \tag{53}$$

рекомендуется доказать самостоятельно. для самостоятельного доказательства также можно порекомендовать утверждения

$$C\boldsymbol{o}(f) \rightleftharpoons \boldsymbol{o}(f) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{o}(Cf) \rightleftharpoons \boldsymbol{o}(f), \qquad C = \text{const} \tag{54}$$

и задачи **№ 646(б,в)**.

Далее перейдём к введённому в [2] отношению «$\backsim$» и обобщим его для функций следующим образом:

> Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *сопоставимы* при $x \to x_0$, если в точке x_0 любая из них подчинена другой:
>
> $$f = \boldsymbol{O}(g) \;\&\; g = \boldsymbol{O}(f), \quad x \to x_0. \tag{55}$$
>
> Этот факт обозначают $f(x) \backsim g(x)$ или $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$.

В задачнике [3] кое-где используется обозначение $f = \boldsymbol{O}^*(g)$, которое отличается от «$\backsim$», но очень близко к нему. Точный смысл его таков:

$$f = \boldsymbol{O}^*(g) \iff f = \boldsymbol{O}(g) \;\&\; f \neq \boldsymbol{o}(g). \tag{56}$$

На практике можно пользоваться тем, что если имеет место (55), то имеет место и (56), причём в обоих смыслах, т.е.

$$f \backsim g \;\Rightarrow\; f = \boldsymbol{O}^*(g) \;\&\; g = \boldsymbol{O}^*(f), \quad x \to x_0. \tag{57}$$

В силу уже доказанного свойства (45) отношение «$\backsim$» транзитивно:

$$f \backsim g \;\&\; g \backsim \varphi \;\Rightarrow\; f \backsim \varphi \tag{58}$$

и кроме того, имеет место очень важное свойство

$$f \backsim g \;\Rightarrow\; \boldsymbol{O}(f) \rightleftharpoons \boldsymbol{O}(g) \;\&\; \boldsymbol{o}(f) \rightleftharpoons \boldsymbol{o}(g), \tag{59}$$

которое мы оставим здесь без доказательства. Наконец, в силу свойств отношения «$\boldsymbol{O}$» можно утверждать, что любая функция $f(x)$ находится сама с собой в отношении «$\backsim$»:

$$\forall f\colon X \to \mathbb{R}: \quad f(x) \backsim f(x). \tag{60}$$

Нам осталось рассмотреть отношение эквивалентности «$\sim$», введённое в [1] для последовательностей. Для функций оно выглядит так:

Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны* при $x \to x_0$, если вблизи точки x_0 разность между ними пренебрежимо мала по сравнению с любой из них:

$$\boldsymbol{o}(f) \overset{\leftleftarrows}{=} f(x) - g(x) \overset{\rightrightarrows}{=} \boldsymbol{o}(g), \quad x \to x_0. \tag{61}$$

Этот факт обозначается $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Предположим, что при $x \to x_0$ имеет место $f(x) \sim g(x)$. Тогда, в соответствии с (61), можно записать $f = g + \boldsymbol{o}(g)$, а в соответствии с (50), кроме того, $f = g + \boldsymbol{O}(g)$. Согласно определению (44),

$$|f(x)| = |g(x) + \boldsymbol{O}(g)| \leqslant |g(x)| + |\boldsymbol{O}(g)| \leqslant |g(x)| + M|g(x)| = (M+1)|g(x)|,$$

а это означает, что $f = \boldsymbol{O}(g)$. Точно так же, записывая $g = f + \boldsymbol{o}(f)$, можно получить $g = \boldsymbol{O}(f)$. Этим мы доказали, что

$$f(x) \sim g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \approx g(x), \tag{62}$$

а значит, свойства (57)–(60) остаются в силе и для отношения эквивалентности «$\sim$». Мы только что решили задачу **№ 649**.

Обратное по сравнению с (62) утверждение неверно, однако если две функции сопоставимы, то часто их можно сделать эквивалентными, домножив одну из них на некоторую ненулевую константу. Если быть точным, такое всегда можно сделать, если обе эти функции имеют пределы в точке x_0.

Все взаимосвязи введённых нами отношений «$\boldsymbol{O}$», «$\boldsymbol{o}$», «$\approx$» и «$\sim$» можно представить диаграммой, изображённой на рис. 5.

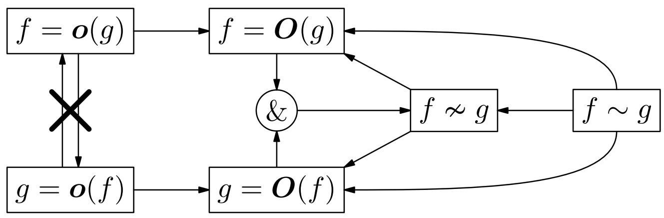

Рис. 5: Взаимосвязь отношений сравнения.

Далее мы рассмотрим очень важный вопрос о связи этих отношений с пределами функций. В рассуждениях будем предполагать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ рассматриваются нами в такой окрестности $\hat{\mathrm{S}}_d(x_0)$ точки x_0, в которой они не обращаются в нуль.

Допустим, что существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \quad |a| < \infty. \tag{63}$$

По определению, это означает выполнение условия

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0): \quad \left|\tfrac{f(x)}{g(x)} - a\right| < \varepsilon. \tag{64}$$

Присутствующее здесь неравенство преобразуем к виду

$$|f(x) - ag(x)| < \varepsilon |g(x)|$$

и далее воспользуемся известным свойством модуля $|u| - |v| \leqslant |u - v|$:

$$|f(x)| - |ag(x)| \leqslant |f(x) - ag(x)| < \varepsilon|g(x)|,$$

откуда

$$|f(x)| < \big(\varepsilon + |a|\big)|g(x)|.$$

Согласно (64), величина ε может быть выбрана произвольно. Положим, например, $\varepsilon = 1$. Условие (64) тогда примет вид

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0): \quad |f(x)| < \big(1 + |a|\big)|g(x)|.$$

Это в точности совпадает с условием (44), в котором нужно положить $M = 1 + |a|$. Итак, мы доказали, что из существования предела (63) следует отношение $f = \boldsymbol{O}(g)$ при $x \to x_0$.

Обратное утверждение неверно; чтобы убедиться в этом, достаточно взять $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ и $g(x) = 1$. Тогда $f = \boldsymbol{O}(g)$ при $x \to 0$, однако предел (63) не существует.

Пользуясь только что доказанным свойством

$$(63) \;\Rightarrow\; f = \boldsymbol{O}(g), \quad x \to x_0, \tag{65}$$

очень легко доказать утверждения задач **№ 650(а,б)** и **№ 651(а,б,г)**. Вместе с тем, в задачах **№ 650(в,е)** и **№ 651(в)** придётся пользоваться определением (44): предел (63) в них не существует.

Теперь перейдём к отношению «$\boldsymbol{o}$» и его связи с пределами. Возьмём определение (49) и пользуясь тем, что $g(x) \neq 0$ при $x \in \hat{\mathrm{S}}_d(x_0)$, перепишем его в виде

$$\forall M > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0): \quad \left|\tfrac{f(x)}{g(x)}\right| < M.$$

Эта запись с точностью до замены букв $M \leftrightarrow \varepsilon$ совпадает с определением предела $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ при $x \to x_0$, т.е.

$$f = \boldsymbol{o}(g) \quad \text{при } x \to x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{66}$$

Формулу (66) иногда рассматривают в качестве альтернативного определения отношения «$\boldsymbol{o}$»; её также записывают в виде

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\boldsymbol{o}(g(x))}{g(x)} \equiv 0. \tag{67}$$

Это соотношение позволяет легко обосновать утверждение задачи **№ 650(ж)**.

Зная (66)–(67), уже никакого труда не составит связать с пределом отношение эквивалентности. Для этого достаточно взять равенство $f(x) - g(x) = \boldsymbol{o}(g)$ из (61) и поделить его на $g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 = \frac{\boldsymbol{o}(g)}{g(x)}\,.$$

Устремляя здесь $x \to x_0$, получаем

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \lim_{x\to x_0} \tfrac{\boldsymbol{o}(g)}{g(x)} = 1.$$

Таким образом, искомая связь имеет следующий вид:

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{68}$$

Разумеется, аналогичное условие можно записать и для обратного отношения функций $\frac{g(x)}{f(x)}$. Это условие позволяет без труда обосновать утверждения задач **№ 650(д)** и **№ 651(ж)**.

Итоги рассуждений (65)–(68) могут быть сведены в таблицу 2. Кроме того, вспоминая результаты § 6–§ 7, на основании (68) мы можем составить очень важную таблицу 3, в которой перечислены эквивалентные бесконечно малые при $x \to 0$. Для любой пары присутствующих в ней функций можно записать эквивалентность, например,

$$\operatorname{Arsh} x \sim \operatorname{tg} x$$

или асимптотическое равенство типа

$$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{tg} x + \boldsymbol{o}(\operatorname{tg} x).$$

Обе такие формы записи мы будем активно использовать при нахождении пределов.

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$	$a = 0$	$\Leftrightarrow$	$f = \boldsymbol{o}(g)$
	$a = \infty$	$\Leftrightarrow$	$g = \boldsymbol{o}(f)$
	$\|a\| < \infty$	$\Rightarrow$	$f = \boldsymbol{O}(g)$
	$0 \neq \|a\| < \infty$	$\Rightarrow$	$f = \boldsymbol{O}(g)$ & $g = \boldsymbol{O}(f)$; $f \asymp g$
	$a = 1$	$\Leftrightarrow$	$f = \boldsymbol{O}(g)$ & $g = \boldsymbol{O}(f)$; $f \sim g$

Таблица 2: Связь отношений сравнения с пределами.

$x \to 0$	$\sin x$ $\operatorname{tg} x$	$\operatorname{sh} x$ $\operatorname{th} x$	$e^x - 1$ $(a^x - 1)/\ln a$	$\frac{(1+x)^a - 1}{a}$
	$\arcsin x$ $\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{Arsh} x$ $\operatorname{Arth} x$	$\ln(1+x)$	$a\left((1+x)^{\frac{1}{a}} - 1\right)$

Таблица 3: Эквивалентные бесконечно малые

8.2. Шкала сравнения

Будем рассматривать семейство функций

$$\varphi_a^0(a) = x^a, \quad a > 0, \tag{69}$$

которые при $x \to 0$ являются бесконечно малыми. Пусть, кроме того, имеется некоторая функция $f(x)$, также бесконечно малая при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Идея сравнения бесконечно малых функций заключается в следующем. Допустим, нам удалось подобрать такую константу $\alpha > 0$, что $f(x)$ и $\varphi_\alpha^0(x)$ при $x \to 0$ оказались сопоставимыми:

$$f(x) \asymp \varphi_\alpha^0(x), \quad x \to 0.$$

Тогда говорят, что функция $f(x)$ является *бесконечно малой порядка α относительно шкалы сравнения*, образуемой функциями (69). Если же, кроме того, удалось[8] отыскать такую ненулевую константу $C = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) \sim C\varphi_\alpha^0(x) = Cx^\alpha, \quad x \to 0,$$

то выражение Cx^α называется *главной частью* функции $f(x)$ по шкале сравнения (69) при $x \to 0$.

Если в точке $x_0 = 0$ нужно сравнивать не бесконечно малые, а бесконечно большие функции, то вместо шкалы (69) можно пользоваться шкалой

$$\varphi_a^\infty(x) = \frac{1}{x^a} = x^{-a}, \quad a > 0,$$

а в произвольном случае $x_0 \neq 0$ пользуются шкалами

$$\varphi_a^0(x) = (x - x_0)^a \quad \text{и} \quad \varphi_a^\infty(x) = \frac{1}{(x - x_0)^a}\,, \quad a > 0.$$

Если же $x_0 = \infty$, то удобны шкалы

$$\varphi_a^0(x) = \frac{1}{x^a} \quad \text{и} \quad \varphi_a^\infty(x) = x^a, \quad a > 0.$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что при $x \to x_0$

$$f \backsim \varphi_\alpha^0 \quad \text{и} \quad g \backsim \varphi_\beta^0,$$

то при $\alpha > \beta$ говорят, что f является бесконечно малой более высокого порядка, чем g; аналогично для бесконечно больших и т.п. В этой терминологии эквивалентные функции естественным образом оказываются бесконечными одного порядка.

Для определения порядков бесконечных функций и выделения их главных частей пользуются свойством (68) и всеми возможными способами нахождения пределов. Рассмотрим, например, задачу **№ 653(г)**, в которой $x \to 0$ и $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$. Очевидно, $f(x) \to 0$; попробуем определить порядок малости и выделить главную часть по шкале (69).

Преобразуем $f(x)$ следующим образом:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} = \frac{2\sin x\, \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x}\,.$$

Вспоминая замечательный предел (28), можно увидеть, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\, \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \frac{1}{2}\,,$$

а при выборе любой другой (кроме тройки) степени x этот предел будет равен либо нулю ($a < 3$), либо бесконечности ($a > 3$). Отсюда заключаем, что

$$\operatorname{tg} x - \sin x \backsim \varphi_3^0(x),$$

а главная часть равна $\frac{x^3}{2}$. Иными словами,

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{x^3}{2} + \boldsymbol{o}(x^3). \tag{70}$$

[8] В данном случае, поскольку $f(x)$ и $\varphi_a^0(x)$ имеют в нуле пределы, обязательно удастся.

В некоторых случаях для выделения главной части достаточно алгебраических преобразований. Так, в **№ 653(а)**, где используется та же шкала сравнения (70), можно представить функцию в виде

$$f(x) = 2x - 3x^3 + x^5 = x(2 - 3x^2 + x^4).$$

Здесь при $x \to 0$ множитель x отвечает за бесконечную малость функции, а выражение в скобках стремится к ненулевой константе $C = 2$, откуда заключаем, что главная часть есть $2x$:

$$2x - 3x^3 + x^5 \approx \varphi_1^0; \quad 2x - 3x^3 + x^5 = 2x + \boldsymbol{o}(x).$$

Аналогично решается **№ 655(а)** с функцией $f(x) = x^3 - 3x + 2$ и шкалой сравнения $(x-1)^a$ при $x \to 1$. Имеем

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 = \underbrace{(x+2)}_{\to 3} \cdot (x-1)^2$$

и главная часть равна $3(x-1)^2$.

В **№ 658(в)** показатель степени будет дробным:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x+x^2} \cdot \sqrt[3]{1-x}} = -\frac{x}{\sqrt[3]{1+x+x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right)^{1/3}.$$

Первый сомножитель при $x \to 1$ стремится к $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$, так что главная часть равна

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/3}.$$

Для самостоятельного решения на выделение главной части рекомендуются задачи **№ 653(б,в)**, **№ 656(б,в)** и **№ 658(а,б,д)**.

Наконец, нужно сделать очень важное замечание: для любой шкалы могут существовать функции, несравнимые с ней. В качестве примера рассмотрим $f(x) = \ln x$ при $x \to +\infty$. Эта функция является бесконечно большой, так что попробуем воспользоваться шкалой $\varphi_a^\infty(x) = x^a$.

Проще всего[9] в данном случае воспользоваться правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\frac{1}{x})}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{ax^a} = 0, \quad (a > 0).$$

Отсюда видно, что *никаким* выбором степени a нельзя обеспечить сопоставимость функций $\ln x \sim \varphi_a^\infty(x)$. В таких случаях говорят ещё, что функция $\ln x$ возрастает *несоизмеримо медленнее* по сравнению со степенными функциями x^a.

В заключение этого параграфа мы установим ещё две полезные асимптотические формулы. Рассмотрим функцию $f(x) = 1 - \cos x$, которая при $x \to 0$ является бесконечно малой. Выделим её главную часть по шкале (69):

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \tfrac{x}{2} \sim 2 \cdot (\tfrac{x}{2})^2 = \tfrac{x^2}{2}, \quad x \to 0.$$

[9] Рассматриваемый ниже предел можно найти и без использования дифференциального исчисления, хотя этот путь довольно длинен. Соответствующие выкладки см. [4], т. 1, гл. II, § 2, п. 54.

Отсюда можно записать асимптотическое равенство $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(\frac{x^2}{2})$, а поскольку $\boldsymbol{o}(\frac{x^2}{2}) = \boldsymbol{o}(x^2)$ согласно (60), то

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2), \quad x \to 0. \tag{71}$$

Совершенно так же получается асимптотическое равенство для гиперболического косинуса:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \tfrac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2), \quad x \to 0. \tag{72}$$

8.3. Правила действий

В этом параграфе мы подытожим некоторые уже упоминавшиеся свойства отношения «$\boldsymbol{o}$» и выведем несколько новых; эти свойства в дальнейшем окажутся полезными для нахождения пределов.

Главное правило, которое нужно помнить (и которое студенты чаще всего не осознают до конца), заключается в следующем:

> Символ «$\boldsymbol{o}$» не является алгебраическим выражением и преобразования с ним не могут выполняться по алгебраическим правилам. В частности, *он не может сокращаться в подобных слагаемых.*

В справедливости этого утверждения легко убедиться на примере функции $u(x) = x^2 - x^3$ при $x \to 0$. Пользуясь соотношением (66), сразу получаем, что в точке $x_0 = 0$

$$x^2 = \boldsymbol{o}(x) \quad \text{и} \quad x^3 = \boldsymbol{o}(x),$$

так что можно записать $u(x) = \boldsymbol{o}(x) - \boldsymbol{o}(x)$. Однако в проколотой окрестности $\hat{\mathrm{S}}_\delta(0)$ функция $u(x)$ не есть тождественный ноль, так что $\boldsymbol{o}(x) - \boldsymbol{o}(x) \neq 0$.

На самом деле, вспомнив утверждение «линейная комбинация конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая», можно записать формулу

$$\alpha\boldsymbol{o}(u) \pm \beta\boldsymbol{o}(u) = \boldsymbol{o}(u), \quad \alpha, \beta = \mathrm{const}\,. \tag{73}$$

К ней можно добавить свойство «поглощения константы» (54) и транзитивности (51).

Далее мы на основе определения (49) докажем важное свойство «поглощения бесконечно малой»

$$\boldsymbol{o}\big(u + \boldsymbol{o}(u)\big) = \boldsymbol{o}(u), \tag{74}$$

которое понадобится нам для нахождения пределов.

Для этого, предположив что $w = \boldsymbol{o}(u)$, покажем что из соотношения $v = \boldsymbol{o}(u+w)$ следует соотношение $v = \boldsymbol{o}(u)$. (Все функции рассматриваем вблизи точки x_0.)

Выберем в соответствии с (49) произвольно $M > 0$. При этом, так как $w = \boldsymbol{o}(u)$, то

$$\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in \hat{\mathrm{S}}_{\delta_1}(x_0): \quad |w| \leqslant M|u|.$$

С другой стороны, поскольку $v = \boldsymbol{o}(u + w)$, то

$$\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in \hat{\mathrm{S}}_{\delta_2}(x_0): \quad |v| \leqslant M|u + w|.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда справедливо

$$\forall x \in \hat{\mathrm{S}}_{\delta}(x_0): \quad |v| \leqslant M|u + w| \leqslant M|u| + M|w| \leqslant M|u| + M^2|u| = M(M+1)|u|.$$

Окончательно записываем

$$\forall M>0 \quad \exists\delta=\min\bigl(\delta_1(M),\delta_2(M)\bigr) \quad \forall x\in \hat{\mathrm{S}}_\delta(x_0): |v|\leqslant M(M+1)|u|,$$

а это и означает[10], что $v=\boldsymbol{o}(u)$. Соотношение (74) тем самым доказано. Совместно с (73) оно даёт более общую формулу

$$\boldsymbol{o}\bigl(\alpha u\pm\beta\boldsymbol{o}(u)\bigr)=\boldsymbol{o}(u), \quad \alpha,\beta=\mathrm{const}\,. \tag{75}$$

Аналогично (74) по определению (49) доказываются соотношения

$$\boldsymbol{o}^n(u)=\boldsymbol{o}(u^n) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{o}(u^n)\boldsymbol{o}(u^m)=\boldsymbol{o}(u^{n+m}), \qquad n,m\geqslant 0. \tag{76}$$

Это рекомендуется проделать самостоятельно в качестве упражнения. Заметим, что очень похоже решаются задачи **№ 647(в)** и **№ 648(в)**, только вместо определения (49) нужно воспользоваться определением (44).

u произвольна	u бесконечно мала	u и v бесконечно малы
$\alpha\boldsymbol{o}(u)\pm\beta\boldsymbol{o}(u)=\boldsymbol{o}(u)$ $\alpha\boldsymbol{o}(u)=\boldsymbol{o}(u)$ $\boldsymbol{o}(\alpha u)=\boldsymbol{o}(u)$ $\boldsymbol{o}\bigl(\alpha u\pm\beta\boldsymbol{o}(u)\bigr)=\boldsymbol{o}(u)$ $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{o}(u))=\boldsymbol{o}(u)$ $\boldsymbol{o}^n(u)=\boldsymbol{o}(u^n)$ $\boldsymbol{o}(u^n)\boldsymbol{o}(u^m)=\boldsymbol{o}(u^{m+n})$	$\boldsymbol{o}(u^n)=\boldsymbol{o}(u^m), \quad n>m$ $\alpha\boldsymbol{o}(u^n)\pm\beta\boldsymbol{o}(u^m)=\boldsymbol{o}(u^{\min(m,n)})$ $u\cdot\boldsymbol{o}(u^n)=\boldsymbol{o}(u^{n+1})$ $\frac{\boldsymbol{o}(u^n)}{u}=\boldsymbol{o}(u^{n-1}), \quad n>1$	$uv=\boldsymbol{o}(u), \quad uv=\boldsymbol{o}(v)$ $u\sim v \;\Rightarrow\; \boldsymbol{o}(u)\rightleftharpoons\boldsymbol{o}(v)$
$\alpha=\mathrm{const}, \quad \beta=\mathrm{const}, \quad n=\mathrm{const}\geqslant 0, \quad m=\mathrm{const}\geqslant 0$		

Таблица 4: Правила действий с символом «$\boldsymbol{o}$».

До сих пор мы не делали никаких предположений относительно функции u. Теперь же предположим — и будем придерживаться этого предположения до конца текущего параграфа, — что она бесконечно мала при $x\to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} u(x)=0.$$

Пусть, кроме того, n и m — это две неотрицательные (не обязательно натуральные) константы.

Докажем для начала свойство понижения порядка:

$$\boldsymbol{o}(u^n)\overset{\to}{=}\boldsymbol{o}(u^m), \quad n>m. \tag{77}$$

Для этого предположим, что $w=\boldsymbol{o}(u^n)$ при $x\to x_0$; согласно (66), имеет место

$$\lim_{x\to x_0}\frac{w(x)}{u^n(x)}=0. \tag{78}$$

Пусть теперь $\gamma=n-m<n$. Так как $n>m$, то $\gamma>0$ и $u^\gamma(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Домножим отношение $\frac{w}{u^n}$ на u^γ:

$$\frac{u^\gamma(x)w(x)}{u^n(x)}=\frac{u^{n-m}(x)w(x)}{u^n(x)}=\frac{w(x)}{u^{n-(n-m)}(x)}=\frac{w(x)}{u^m(x)}\,.$$

[10]Множитель $M(M+1)$ за счёт выбора M может быть сделан сколь угодно малым. Например, достаточно рассмотреть случай $0<M<1$ и тогда $M(M+1)<2M$.

Так как $u^\gamma \to 0$ и $\frac{w}{u^n} \to 0$, то произведение $u^\gamma \cdot \frac{w}{u^n}$ бесконечно мало и, стало быть,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{w(x)}{u^m(x)} = 0.$$

Согласно (66), это и означает, что $w = \boldsymbol{o}(u^m)$. Итак, если $w = \boldsymbol{o}(u^n)$, то $w = \boldsymbol{o}(u^m)$ при $n > m \geqslant 0$. Свойство (77) доказано.

Объединяя только что доказанное (77) с (73), легко получить очень важное соотношение

$$\alpha \boldsymbol{o}(u^n) \pm \beta \boldsymbol{o}(u^m) \overset{\rightarrow}{=} \boldsymbol{o}\big(u^{\min(n,m)}\big); \quad \alpha, \beta = \mathrm{const}; \quad n, m \geqslant 0.$$

Оно очень близко к утверждению задач **№ 647(б)** и **№ 648(б)**.

Далее в дополнение к (76) докажем ещё одно правило действий со степенями. Пусть по-прежнему $w = \boldsymbol{o}(u^n)$, так что равенство (78) продолжает иметь место.

Домножив и разделив отношение $\frac{w}{u^n}$ на u, мы тем самым ничего не изменим:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)w(x)}{u(x)u^n(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)w(x)}{u^{n+1}(x)} = 0.$$

Согласно (66), это означает, что $uw = \boldsymbol{o}(u^{n+1})$. Вспоминая, что $v = \boldsymbol{o}(u^n)$, записываем

$$u \cdot \boldsymbol{o}(u^n) \overset{\rightarrow}{=} \boldsymbol{o}(u^{n+1}), \quad n \geqslant 0. \tag{79}$$

Совершенно аналогично доказывается свойство

$$\frac{\boldsymbol{o}(u^n)}{u} \overset{\rightarrow}{=} \boldsymbol{o}(u^{n-1}), \quad n \geqslant 1; \tag{80}$$

это рекомендуется проделать самостоятельно.

Наконец, предположим, что при $x \to x_0$ функции $u(x)$ и $v(x)$ бесконечно малы одновременно. Тогда можно записать

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x)}{u(x)} = \lim_{x\to x_0} v(x) = 0 \;\Rightarrow\; uv = \boldsymbol{o}(u)$$

и точно так же $uv = \boldsymbol{o}(v)$. Это свойство хорошо формулируется словами: *произведение двух бесконечно малых бесконечно мало по сравнению с любой из них.*

Теперь пусть u и v не только бесконечно малы при $x \to x_0$, но и эквивалентны в этой точке: $u \sim v$. Согласно (68), это означает, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{v(x)}{u(x)} = 1.$$

Пусть, кроме того, $w = \boldsymbol{o}(u)$, так что, согласно (66),

$$\lim_{x\to x_0} \frac{w(x)}{u(x)} = 0.$$

Рассмотрим вместо отношения $\frac{w}{u}$ отношение $\frac{w}{v}$ при $x \to x_0$:

$$\frac{w(x)}{v(x)} = \cancelto{0}{\frac{w(x)}{u(x)}} \cdot \cancelto{1}{\frac{u(x)}{v(x)}}.$$

Предел первого сомножителя в правой части при $x \to x_0$ существует и равен нулю; предел второго также существует и равен единице. Следовательно, существует и предел левой части:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{w(x)}{v(x)} = 0 \;\Rightarrow\; w = \boldsymbol{o}(v).$$

Мы показали сейчас, что если $u \sim v$, то $\boldsymbol{o}(u) \overset{\rightarrow}{=} \boldsymbol{o}(v)$. Совершенно аналогично показывается, что в этом случае и $\boldsymbol{o}(v) \overset{\rightarrow}{=} \boldsymbol{o}(u)$, так что

$$u \sim v \;\Rightarrow\; \boldsymbol{o}(u) \rightleftharpoons \boldsymbol{o}(v).$$

Все полученные в этом параграфе правила действий с бесконечно малыми можно свести в таблицу 4.

8.4. Раскрытие неопределённостей через асимптотику

Введённые ранее отношения для бесконечных и их свойства можно применять для нахождения пределов с неопределённостями типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ и т.п. Пусть необходимо найти предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\,,$$

где функция $f(x)$ представляет собой некоторое выражение (обычно довольно сложное). Описываемый в данном параграфе подход основан на двух правилах:

- любое подвыражение, входящее в $f(x)$, можно заменить на асимптотически равное ему при $x \to x_0$, пользуясь соотношениями типа $\sin x = x + \boldsymbol{o}(x)$ для $x_0 = 0$;
- любое подвыражение, входящее в $f(x)$ *и являющееся множителем или делителем для всей функции* f, можно заменить на эквивалентное ему при $x \to x_0$.

Если подобные замены и последующее применение формул таблицы 4 позволяют вычислить упростившийся предел, то этот результат и будет ответом.

Первое из этих правил достаточно понятно и не требует каких-то особых обоснований: действительно, любое выражение можно заменять на равное ему, если это каким-то упрощает выкладки. Второе же правило менее очевидно; обоснуем его.

Пусть необходимо найти предел

$$\lim_{x \to x_0} u(x)v(x), \tag{81}$$

причём при $x \to x_0$ имеет место эквивалентность $u \sim w$. Представим функцию под пределом в виде

$$u(x)v(x) = \cancelto{1}{\frac{u(x)}{w(x)}} \cdot w(x)v(x).$$

Из двух сомножителей в правой части первое стремится к единице при $x \to x_0$ согласно (68). Следовательно, предел (81) левой части и предел

$$\lim_{x \to x_0} w(x)u(x)$$

либо одновременно существуют и равны, либо одновременно не существуют. Аналогично обосновывается вторая половина правила для случая, когда $u(x)$ является не множителем, а делителем.

Самой большой (и самой частой) студенческой ошибкой является замена на эквивалент выражения, *которое входит в исследуемую функцию не как делитель или множитель.* Разберём эту ошибку на примере предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}\,.$$

Как нам уже известно, при $x\to 0$ имеет место $x\sim\sin x\sim\operatorname{tg} x$, так что соответствующая подстановка в числитель вроде бы приводит к нулевому ответу. Такой ответ, однако, будет неверным.

Увидеть источник ошибки позволяет первое правило. Если записать

$$\sin x=x+\boldsymbol{o}(x)\quad\text{и}\quad\operatorname{tg} x=x+\boldsymbol{o}(x)\quad\text{при } x\to 0,$$

то подстановка этих выражений даёт

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{o}(x)}{x^3}\,. \tag{82}$$

(Здесь мы воспользовались соотношением $\boldsymbol{o}(x)-\boldsymbol{o}(x)=\boldsymbol{o}(x)$ из предыдущего параграфа.) Однако (82) является неопределённостью! Действительно, за $\boldsymbol{o}(x)$ может скрываться x^2 (и тогда предел обращается в бесконечность), или x^3 (предел обращается в единицу), или x^4 (предел обращается в ноль) и т.п.

Обратимся теперь к соотношению (70), полученному в § 8.2. Используя его, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+\boldsymbol{o}(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{\boldsymbol{o}(x^3)}{x^3}\right).$$

Это выражение уже не содержит никаких неопределённостей и с учётом (66) мы получаем правильный ответ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\,.$$

Далее рассмотрим задачу **№ 539**. Воспользуемся в ней основным тригонометрическим тождеством:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{1-\sin^2 ax}}{\ln\sqrt{1-\sin^2 bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 ax)}{\frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 bx)}\,.$$

Множитель $\frac{1}{2}$ в числителе и знаменателе сокращается, а функции $\sin^2 ax$ и $\sin^2 bx$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми. Вспомнив, что $\ln(1+u)\sim u$ при $u\to 0$, заменим числитель на эквивалентную функцию $(-\sin^2 ax)$, а знаменатель на эквивалентную $(-\sin^2 bx)$. Делать это можно, так как числитель и знаменатель по определению являются множителем и делителем всей дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 ax}{-\sin^2 bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 ax}{\sin^2 bx}\,.$$

Теперь вспоминаем, что $\sin u\sim u$ при $u\to 0$ и снова меняем числитель и знаменатель на эквиваленты:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2}{b^2x^2}=\frac{a^2}{b^2}\,.$$

Заметим ещё, что по ходу решения этой задачи мы фактически вывели пару формул:

$$\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2) \quad \text{и} \quad \ln\cos x \sim \left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{при } x \to 0.$$

Точно так же выводятся аналогичные формулы для гиперболического косинуса:

$$\ln\operatorname{ch} x = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{o}(x^2) \quad \text{и} \quad \ln\operatorname{ch} x \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{при } x \to 0.$$

В задаче **№ 561** просят рассмотреть два случая. Первый из них достаточно прост: если заметить, что функции 3^x и 2^x бесконечно малы при $x \to -\infty$, то

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(3/2)^{|x|}} = 0.$$

Второй случай более сложен: если $x \to +\infty$, то 3^x и 2^x оказываются бесконечно большими и воспользоваться эквивалентностью $\ln(1+u) \sim u$ нельзя. Здесь требуются дополнительные преобразования:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln[3^x(1+3^{-x})]}{\ln[2^x(1+2^{-x})]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x\ln 2 + \ln(1+2^{-x})}\,.$$

Это уже больше похоже на предыдущий случай, однако здесь $\ln(1+3^{-x})$ и $\ln(1+2^{-x})$ не являются множителями или делителями всей функции. Вместо них придётся подставлять не эквивалентные выражения, а асимптотические равенства:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln 3 + 3^{-x} + \boldsymbol{o}(3^{-x})}{x\ln 2 + 2^{-x} + \boldsymbol{o}(2^{-x})}\,.$$

Разделим числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x3^x} + \frac{\boldsymbol{o}(3^{-x})}{x}}{\ln 2 + \frac{1}{x2^x} + \frac{\boldsymbol{o}(2^{-x})}{x}}\,.$$

Замечаем, что вторые слагаемые бесконечно малы:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x2^x} = 0,$$

а с третьими слагаемыми можно поступить следующим образом:

$$\frac{\boldsymbol{o}(3^{-x})}{x} = \frac{3^{-x}\boldsymbol{o}(3^{-x})}{x3^{-x}} = \frac{\boldsymbol{o}(3^{-x})}{3^{-x}} \cdot \frac{1}{x3^x} \to 0$$

и аналогично для $\frac{\boldsymbol{o}(2^{-x})}{x}$. Окончательно записываем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}\,.$$

Задача **№ 567** выглядит отчасти похоже, но решается гораздо проще. Здесь достаточно заметить, что знаменатель $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ есть не что иное, как развёрнутая запись ареасинуса $\operatorname{Arsh} x$, а выражение xe^x бесконечно мало при $x \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to0} \frac{xe^x}{\operatorname{Arsh} x} = \lim_{x\to0} \frac{x}{\operatorname{Arsh} x} \cdot \lim_{x\to0} e^x = 1.$$

Для самостоятельного решения по теме данного параграфа рекомендуются задачи **№ 523, 535, 577(а)**. Можно также попробовать найти пределы

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos x\cdot\operatorname{ch} x)}{x^2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to0} \frac{\sin\sin\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}}{\ln\cos x}\,. \tag{83}$$

9. Непрерывность и точки разрыва

В этом параграфе речь пойдёт о нарушениях непрерывности функций и их характере. Напомним, что точки, в которых функция не является непрерывной, называются точками её разрыва.

Точки разрыва классифицируют на три типа в зависимости от существования или несуществования в них односторонних пределов и значений функции. Вот эта классификация:

- Точка разрыва, в которой предел функции существует, но не равен значению функции в точке (либо не существует *значения* функции в точке), называется *точкой устранимого разрыва*[11].

- Точка разрыва, в которой существуют *конечные* пределы функции слева и справа, но они не равны между собой, называется *точкой разрыва первого рода*. При этом не имеет значения, определена ли в этой точке функция (и если определена, то чему именно там равна). Подобные точки называют ещё *точками конечного разрыва*.

- Все остальные точки разрыва (т.е. те, в которых не существует хотя бы один из односторонних пределов или где хотя бы один из них бесконечен) называются *точками разрыва второго рода*.

Теперь приведём примеры на каждый из этих трёх случаев. Фактически, все они уже возникали в предыдущих параграфах.

Типичным случаем точки устранимого разрыва является функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x = 0$. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда функция в точке вовсе не определена. Нетрудно привести и пример, в котором значение функции существует, но не совпадает с пределом (также существующим). Таковым может служить функция $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x$ при $x = 0$ (см. рис. 1 на стр. 3 и соответствующие рассуждения).

Если на том же рисунке посмотреть график функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ всё в той же точке $x = 0$, то становится ясно, что здесь мы имеем дело с точкой разрыва первого рода: существуют пределы слева и справа, но они не равны. Здесь, кстати, наблюдается интересный факт: значение функции в её разрывной точке равно полусумме её левого и правого пределов:

$$f(0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 0+} f(x)\right).$$

Подобные разрывы иногда называются *регулярными*, они нередко упоминаются в теории рядов Фурье.

Что же касается точек разрыва третьего рода, то в ответ на предложение привести пример студенты обычно называют $f(x) = \frac{1}{x}$ в нуле, либо $f(x) = \operatorname{tg} x$ при $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, либо $f(x) = \operatorname{ctg} x$ при $x = \pi n$. Разумеется, эти примеры правильны, но в них во всех односторонние пределы *существуют*, хоть и бесконечны. Гораздо более интересен пример функции, которая была бы определена в любой окрестности точки, но не имела бы в этой точке хотя бы одного из односторонних пределов. Такие функции есть:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

определена и непрерывна *всюду, кроме нуля*. В нуле же она не существует сама и не имеет ни одного из односторонних пределов. Обоснованием утверждения является тот факт, что не существуют пределы

$$\lim_{x\to-\infty} \sin x \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} \sin x\,;$$

[11] Иногда *устранимой точкой разрыва*.

нечто подобное предлагалась доказать в самом начале. С другой стороны, для похожей функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

в нуле также имеет место разрыв, но этот разрыв отнюдь не второго рода. Рекомендуется определить его характер самостоятельно.

Заканчивая с определениями и классификациями точек разрыва, рассмотрим ещё один вопрос. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ в нуле существует и имеет правосторонний предел, но не имеет левостороннего. Следуя вышеприведённым определениям, можно ли называть ноль точкой разрыва второго рода этой функции?

Правильный ответ: нельзя! Дело в том, что слева от нуля функция вовсе не определена, так что она не может и не должна иметь в этой точке левосторонний предел. Речь может идти лишь о правосторонней непрерывности, и эта непрерывность имеет место.

Рассмотрим теперь пару задач на определение точек разрыва и их характера. Прежде всего, однако, обсудим функцию

$$[x] = \max_{k \in \mathbb{Z}} \{k \leqslant x\}. \tag{84}$$

Эта функция выделяет целую часть своего аргумента, округляя его *вниз*.

Если, написав определение (84), спросить студентов о значениях этой функции, например, $[2]$, $[0.3]$, $[\pi]$, то обычно сразу следуют правильные ответы: $[2] = 2$, $[0.3] = 0$, $[\pi] = 3$. Однако, стоит указать отрицательный аргумент, как начинаются проблемы: про $[-1.7]$ некоторые скажут, что ответом является (-1), некоторые — что (-2).

Правильным ответом является $[-1.7] = -2$. Минус единица отнюдь не входит во множество целых чисел, не превосходящих (-1.7) и, соответственно, не может являться максимумом этого множества. Выделение целой части числа никоим образом не сводится к отбрасыванию дробной части из его записи!

Теперь мы готовы решить задачу **№ 702**, где необходимо построить график функции выделения дробной части

$$f(x) = x - [x]$$

и определить характер её точек разрыва. Для этой функции иногда ещё используется обозначение $f(x) = \{x\}$, а называют её французским словом *антье*.

Прежде всего заметим, что в любой целой точке эта функция равна нулю. Далее, по мере движения из этой точки вправо, функция линейно возрастает «почти до единицы» и, как только будет достигнуто следующее целое число, «падает» до нуля, после чего всё повторяется (см. рис. 6).

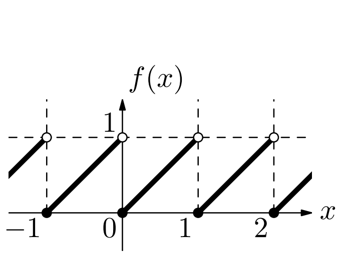

Рис. 6: Функция дробной части $f(x) = x - [x]$.

Итак, рассматриваемая функция имеет точки разрыва при всех целых x. В каждой такой точке она непрерывна справа, но не является непрерывной слева. Односторонние пределы суть

$$\lim_{x\to k-0} f(x) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to k+0} f(x) = f(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, целые числа являются точками разрыва первого рода. Можно ещё добавить, что функция периодична с единичным периодом.

Далее рассмотрим функцию $f(x) = x[x]$ из задачи **№ 703**. Её поведение удобно анализировать на целых полуинтервалах $[k, k+1)$. Так, если $x \in [0,1)$, то целая часть x равна нулю и вся функция на этом полуинтервале обращается в ноль. На полуинтервале от 1 до 2 имеем $[x] = 1$ и, соответственно, $f(x) = x$. Далее $f(x) = 2x$ при $x \in [2,3)$ и т.д.

Беря отрицательные полуинтервалы, аналогично получаем $f(x) = -x$ при $x \in [-1,0)$, $f(x) = -2x$ при $x \in [-2,-1)$ и т.п. Соответствующий график приведён на рис. 7.

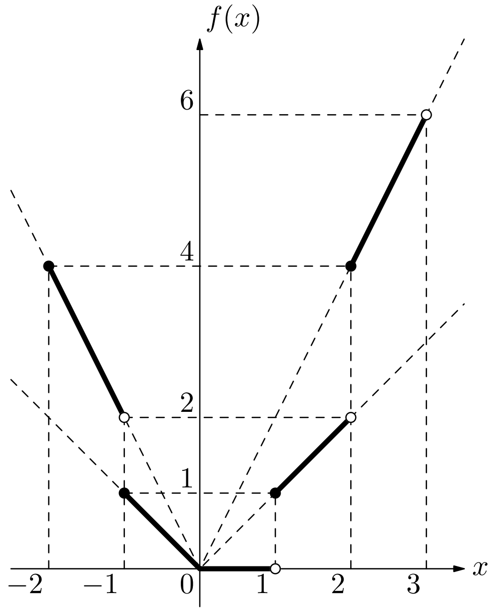

Рис. 7: Функция $f(x) = x[x]$.

Задача оказалась достаточно несложной, однако в ней присутствует интересный факт. Обратим внимание на точку $x = 0$. По графику хорошо видно, что функция в ней непрерывна: пределы слева и справа равны нулю, что совпадает со значением самòй функции. Однако при этом в нуле один из сомножителей произведения $x[x]$ — а именно $[x]$ — является разрывным! Тем самым мы попутно ответили на вопрос задачи **№ 742(а)**: *произведение непрерывной функции на разрывную может быть непрерывным.* В данном примере непрерывным множителем являлся x.

Заметим теперь, что в нашем примере один из сомножителей имел в точке разрыв первого рода. Остаётся открытым вопрос: а справедливо ли утверждение задачи, если речь идёт об устранимом разрыве или разрыве второго рода? Разрешение этого вопроса предоставляется в качестве упражнения.

А что с вопросом задачи **№ 742(б)**? Оказывается, что и произведение двух разрывных функций может быть непрерывным. Это можно увидеть на следующем примере:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leqslant 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -3, & x \leqslant 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}.$$

Совершенно очевидно, что обе эти функции разрывны в нуле. Столь же очевидно, что их произведение всюду непрерывно: $f(x)g(x) \equiv 6$.

Рассмотрение вопросов, связанных с нарушением непрерывности, мы завершим задачей **№ 743**. Первая её половина в свете **№ 742(в)** особых вопросов не вызывает: да, квадрат разрывной функции вполне может быть функцией непрерывной. Например,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f^2(x) \equiv 1.$$

Гораздо больший интерес представляет вторая половина. По аналогии с только что приведённым примером построим разрывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \tag{85}$$

и скажем, что она является *всюду* разрывной. Основанием для такого утверждения может служить тот факт, что любой ненулевой интервал числовой прямой обязательно содержит как рациональную точку x_1, так и иррациональную x_2, и для этих точек имеет место равенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 2, \quad x_1 \in \mathbb{Q},\, x_2 \notin \mathbb{Q}.$$

Однако при этом не сформулировали строгого определения всюду непрерывной функции. Это предоставляется сделать самостоятельно на основании критерия Коши (23).

10. Равномерная непрерывность

В § 4 мы рассматривали критерий Коши (22) существования конечного предела функции в точке x_0 и в самом конце параграфа (см. стр. 12) упомянули его модификацию, позволяющую устанавливать непрерывность функции. Запишем эту модификацию:

> Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{S}_\delta(x_0): \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{86}$$

Пусть теперь имеется множество $X \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in X$. Попробуем на основании критерия Коши записать условие непрерывности функции $f(x)$ на всём множестве X (в его граничных точках будем подразумевать непрерывность слева и справа).

Для этого, во-первых, условие (86) должно выполняться в *любой* точке $x_0 \in X$. Во-вторых, необходимо гарантировать, что точки x_1 и x_2 из $\mathrm{S}_\delta(x_0)$ не выйдут за пределы множества X; проще всего это записывается в виде $x_1, x_2 \in \mathrm{S}_\delta(x_0) \cap X$. Итак, условие непрерывности $f(x)$ на множестве X принимает вид

$$\forall x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{S}_\delta(x_0) \cap X: \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{87}$$

Теперь заметим, что по порядку следования кванторов радиус окрестности δ зависит, вообще говоря, от x_0 и от ε: $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. Усилим условие (87) так, чтобы δ зависело только от ε и *не зависело* от x_0. Для этого нужно всего лишь поменять порядок кванторов, поставив “$\forall x_0 \in X$” после “$\exists \delta > 0$”:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \underbrace{\forall x_0 \in X \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{S}_\delta(x_0) \cap X}: \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{88}$$

В этой записи рассмотрим подробнее фрагмент, выделенный фигурной скобкой. Принадлежность x_1 и x_2 окрестности $\mathrm{S}_\delta(x_0)$ означает, что $|x_1 - x_2| < 2\delta$, при этом расположение окрестности во множестве X произвольно за счёт произвольного выбора её центра x_0:

$$\underbrace{\forall x_0 \in X \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{S}_\delta(x_0) \cap X}_{\forall x_1, x_2 \in X\ (|x_1 - x_2| < 2\delta)}\ .$$

С учётом этого, условие (88) окончательно принимает вид

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in X\ (|x_1 - x_2| < 2\delta): \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{89}$$

Оно, как мы помним, усилено по сравнению с условием непрерывности (87), и всякую функцию, удовлетворяющую (89), называют *равномерно непрерывной на множестве* X. Слово «равномерно» в данном контексте означает «одинаково всюду» в том смысле, что выбор константы δ осуществляется *одинаково во всём множестве* X и зависит лишь от ε.

Относительно определения (89) нужно упомянуть два факта. Во-первых, понятие равномерной непрерывности *имеет смысл лишь для множества* и не имеет никакого смысла для одной отдельно взятой точки. Во-вторых, в условии (89), как правило, вместо $|x_1 - x_2| < 2\delta$ пишут $|x_1 - x_2| < \delta$ — это никак не влияет на общий смысл и более наглядно.

$$\boxed{\forall x_0 \in X} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{S}_\delta(x_0) \cap X: \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \boxed{\forall x_0 \in X} \quad \boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathrm{S}_\delta(x_0) \cap X:} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \boxed{\forall x_0 \in X \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{S}_\delta(x_0) \cap X:} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \boxed{\forall x_1, x_2 \in X\ (|x_1 - x_2| < \delta):} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Рис. 8: Переход от непрерывности к равномерной непрерывности.

Переход от (86) к (89) кратко показан на рис. 8.

В качестве примера на равномерную непрерывность рассмотрим задачу **№ 802(г)** (она же **№ 799**). Здесь в качестве функции выступает $f(x) = \sqrt{x}$, а $X = \{0 \leqslant a \leqslant x < +\infty\}$.

Заметим, что функция строго монотонно возрастает. Тогда, положив для определённости $x_1 < x_2$, мы можем записать

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant f(x_1 + \delta) - f(x_1), \quad \text{если } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Теперь будем рассматривать разность $f(x_1 + \delta) - f(x_1)$:

$$\sqrt{x_1 + \delta} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_1 + \delta} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_1 + \delta} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_1 + \delta} + \sqrt{x_1}} = \frac{\delta}{\sqrt{x_1 + \delta} + \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}\,.$$

Выбрав δ так, что $\sqrt{\delta} < \varepsilon$ (например, $\delta = \frac{\varepsilon^2}{4}$), записываем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \tfrac{\varepsilon^2}{4} \quad \forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 < x_2,\ |x_1 - x_2| < \delta): \quad |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Это означает, что функция является равномерно непрерывной на множестве.

В качестве другого примера можно рассмотреть **№ 792**, где $f(x) = x + \sin x$ и $X = \mathbb{R}$. Как и прежде, предполагаем, что $|x_1 - x_2| < \delta$. Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(x_1 - x_2) + (\sin x_1 - \sin x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| + |\sin x_1 - \sin x_2|.$$

Воспользовавшись первым из неравенств (18), можно записать

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| + |x_1 - x_2| < 2\delta$$

и видно, что для выполнения условия (89) достаточно положить $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ (например, $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$).

Аналогичным образом решаются задачи **№ 802(а,д)**; это рекомендуется проделать самостоятельно.

Далее упомянем очень важную теорему Кантора, обычно вызывающую у студентов большое недоумение. Вот её формулировка:

> *Функция $f(x)$, определённая и непрерывная на ограниченном отрезке $[a, b]$, является на этом отрезке и равномерно непрерывной.*

В свете того, что мы вводили понятие равномерной непрерывности, как усиление непрерывности "обычной", эта теорема действительно вызывает недоумение: вроде бы создаётся впечатление, что дело обстоит как раз наоборот.

На самом деле ключевым словом в этой формулировке является слово *"отрезок"* и настоящий смысл теоремы вот каков:

> Понятие равномерной непрерывности, усиливающее понятие обычной непрерывности, становится эквивалентным ему в том случае, если множество X является *отрезком.*

Если же множество X отрезком не является, то функция может быть на нём непрерывной, но свойством равномерной непрерывности не обладать. В качестве соответствующего примера мы рассмотрим задачу **№ 788**, однако сначала сформулируем отрицание утверждения (89) для задачи **№ 787**. Для этого достаточно обычным образом обратить кванторы.

Итак, функция $f(x)$ на множестве X не является равномерно непрерывной, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in X \ (|x_1 - x_2| < \delta): \quad |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon. \tag{90}$$

Теперь рассмотрим в качестве множества X интервал $(0, 1)$ и в качестве $f(x)$ функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.

Точки x_1 и x_2 по условию (90) должны быть сколь угодно близкими. Положим, например,

$$x_1 = \tfrac{1}{n+1}, \quad x_2 = \tfrac{1}{n+2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Такие точки всегда лежат в интервале $(0, 1)$, причём расстояние между ними

$$|x_1 - x_2| = \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} = \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} < \tfrac{1}{n}$$

за счёт выбора $n \in \mathbb{N}$ может быть сделано меньше любого наперёд заданного δ. При этом справедливо соотношение

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(n+1) - (n+2)| \equiv 1,$$

так что можно положить, к примеру, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и тогда

$$\forall \delta > 0 \quad x_1 = \tfrac{1}{n+1}, x_2 = \tfrac{1}{n+2}: \quad |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon, \qquad \text{где } n > \tfrac{1}{\delta}.$$

Условие (90), таким образом, выполняется и функция $\frac{1}{x}$ на интервале $(0,1)$ не является равномерно непрерывной, хотя в свете §2 она «просто» непрерывна на нём. Аналогично решается задача **№ 795**, рекомендуемая для самостоятельного рассмотрения.

Подведём предварительные итоги:

- понятие равномерной непрерывности более сильно по сравнению с «обычной», так что если функция на множестве равномерно непрерывна, то она и «просто» непрерывна на нём;
- обратное утверждение в общем случае неверно, и функция, непрерывная на множестве, вовсе не обязательно равномерно непрерывна на нём;
- если множество является отрезком, то на нём по теореме Кантора понятия «обычной» и равномерной непрерывности становятся эквивалентными.

Кроме того, достаточно очевидно, что если некоторая функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X, то она будет равномерно непрерывна и на любом его подмножестве, являющимся отрезком, интервалом или полуинтервалом[12].

Обратные рассуждения могут быть значительно более нетривиальными. Например, можно доказать (задача **№ 801.1**), что если $a < c < b$, то из равномерной непрерывности на $[a,c]$ и $[c,b]$ следует равномерная непрерывность на $[a,b]$. В данном случае, согласно теореме Кантора, поскольку речь идёт об отрезках, достаточно будет показать обычную непрерывность. Действительно, во всех точках $[a,b]$, кроме, возможно, точки c, функция $f(x)$ непрерывна по условию (в точке a справа, в точке b слева). В точке же $x = c$, с одной стороны,

$$f(c) = \lim_{x\to c-0} f(x)$$

(это следует из того, что c есть правая точка отрезка $[a,c]$, на котором $f(x)$ непрерывна); с другой стороны,

$$f(c) = \lim_{x\to c+0} f(x), \quad \text{откуда} \quad \lim_{x\to c-0} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c+0} f(x),$$

и в точке $x = c$ функция $f(x)$ также непрерывна. Непрерывность всюду на $[a,b]$ в сочетании с теоремой Кантора и есть требуемое доказательство.

В то же время, однако, возможны очень интересные ситуации типа следующей: функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,c]$ и $(c,b]$, где $a < c < b$, и при этом на $[a,b] = [a,c] \cup (c,b]$ равномерно непрерывной не является; соответствующий пример рекомендуется построить самостоятельно. (Очень похожий случай составляет предмет задачи**№ 801**.)

Наконец, упомянем два удобных для практического применения признака равномерной непрерывности. Первый из них очень похож на утверждение задачи **№ 807** и выглядит следующим образом:

Пусть функция $f(x)$ на множестве X при условии $|x_1 - x_2| < \delta$ (где $x_1, x_2 \in X$) удовлетворяет неравенству

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega(\delta),$$

причём $\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega(\delta) = 0$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X.

[12] Уточнение про отрезок, интервал или полуинтервал здесь необходимо. Иначе без особых трудностей можно построить подмножество, на котором вообще нельзя будет вести речь о непрерывности.

Признак этот особенно удобен для случаев, когда функция монотонна, и мы уже неявно пользовались им в задаче **№ 802(г)**. Доказать его рекомендуется самостоятельно, причём это доказательство одновременно сгодится и для обоснования достаточности критерия из **№ 807**.

Второй признак равномерной непрерывности основан на использовании дифференциального исчисления и выглядит так:

> *Если на множестве X функция $f(x)$ всюду дифференцируема, причём её производная $f'(x)$ ограничена, то имеет место равномерная непрерывность.*

На основании этого признака очень легко решается задача **№ 798**:

$$\left|(\operatorname{arctg} x)'\right| = \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1,$$

и функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси.

Следует, однако, иметь в виду, что этот признак носит лишь достаточный характер! Так, можно построить пример (и это рекомендуется сделать), в котором равномерно непрерывная на множестве функция является на нём дифференцируемой, но её производная неограничена.

Итоги

Таблица 5 содержит список задач, полные или частичные решения которых были приведены в тексте. Для каждого параграфа задачи перечисляются в порядке их упоминания.

§ 1	(стр. 2)	401, 402
§ 2	(стр. 6)	481(а,б,в), 674(б,в,г,е,ж)
§ 3	(стр. 9)	510
§ 5	(стр. 12)	411, 409, 416, 425, 414, 426, 427, 424, 442, 437, 455, 443 454, 444, 452, 436
§ 7	(стр. 19)	472, 471, 474(б), 473, 1318, 475, 476, 482, 488, 512, 514 515, 529, 541, 531, 576(а,в)
§ 8.1	(стр. 25)	646(г), 650(е), 647(а), 648(а), 646(а), 649, 650(а,б,в,д,е,ж) 651(а,б,г,ж)
§ 8.2	(стр. 30)	653(а,г), 655(а), 658(в)
§ 8.3	(стр. 33)	647(б,в), 648(б,в)
§ 8.4	(стр. 36)	539, 561(а,б), 567
§ 9	(стр. 39)	702, 703, 742(а,б), 743
§ 10	(стр. 42)	802(г), 799, 792, 788, 787, 801.1, 798

Таблица 5: Указатель решённых задач.

Кроме того, в тексте был предложен ряд задач, рекомендуемых для самостоятельного решения. Ниже приведён их список.

- Доказать по определению Гейне, что функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ не имеют предела на бесконечности;
- Доказать непрерывность элементарных функций из задачи **№ 674(а,д,з)**;
- Выписать с помощью неравенств и кванторов определения односторонних пределов по Коши (задачи **№ 403, 407**);
- Найти $f(\pi+0)$, если $f(x) = (\sin^2 x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$;

- Раскрывая неопределённости алгебраическими приёмами, решить задачи **№ 413, 415, 423, 424.1, 445, 446, 448, 457, 458, 459, 462, 466, 467**;
- Пользуясь определением предела последовательности, показать, что из (30) следует (31);
- Доказать формулы (37) и (39), опираясь только на (30)–(31) и не используя (29);
- Пользуясь замечательным пределом (28), решить задачи **№ 477, 478, 483–485, 489–491, 474(а,в), 499**;
- Доказать формулу (43) для случаев $a \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{Q}^+$;
- Доказать по определению ареасинуса, что $\frac{\operatorname{Arsh} x}{x} \to 1$ при $x \to 0$;
- Пользуясь замечательным пределом (38)–(39), решить задачи **№ 530, 532, 552, 576(б), 578(а,б), 549**;
- Пользуясь определением (44) отношения «$\boldsymbol{O}$», решить задачи **№ 647(б,в)** и **№ 648(б,в)**;
- Пользуясь определением отношения «$\boldsymbol{o}$», доказать утверждения (53)–(54) и решить задачи **№ 646(б,в)**;
- Решить задачи **№ 653(б,в)**, **№ 656(б,в)**, **№ 658(а,б,д)**;
- Пользуясь определением (49), доказать соотношения (76);
- Предполагая, что функция u бесконечно мала, доказать формулу (80);
- Пользуясь аппаратом эквивалентных функций и асимптотических равенств, решить задачи **№ 523, 535, 577(а)** и найти пределы (83);
- Решить задачи **№ 802(а,д)** и **№ 795**;
- Определить характер разрыва функции $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$;
- Выяснить, справедливо ли утверждение задачи **№ 742(а)**, если одна из функций имеет в точке $x = x_0$ а) устранимый разрыв; б) разрыв второго рода. Если да, то привести соответствующие примеры;
- На основании критерия Коши (23) построить определение *всюду разрывной функции* и показать, что (85) подходит под это определение;
- Построить пример функции $f(x)$, которая равномерно непрерывна на $[a, c]$ и $(c, b]$, где $a < c < b$, но при этом на $[a, b] = [a, c] \cup (c, b]$ равномерно непрерывной не является;
- Для критерия равномерной непрерывности из задачи **№ 807** доказать достаточность утверждения;
- Построить пример равномерно непрерывной на множестве функции, которая имела бы на этом множестве неограниченную производную.

Список литературы

[1] М. Баландин *Предел числовой последовательности.* — Рукопись, 2004.

[2] М. Баландин *Числовые ряды.* — Рукопись, 2004.

[3] Б. Демидович[13] *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1972.

[4] Г. Фихтенгольц *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* — СПб.: Лань, 1997.

[5] Л. Кудрявцев *Курс математического анализа в 3 томах.* — М.: Высш. шк., 1988.

[6] Л.–О. Коши *Дифференциальное и интегральное исчисление.* — СПб., 1893.

[13]Специально указано старое издание задачника, так как в последнем издании 2002 года допущено много опечаток и поменялась нумерация задач, причём изменения коснулись задач, упомянутых в этих заметках.