

# Аксиоматика Фудзиты и геометрические построения

Михаил Баладин<sup>1</sup>

2015

<sup>1</sup>Новосибирск, [michael.balandin@gmail.com](mailto:michael.balandin@gmail.com)

## Аннотация

Оригами — древнее японское искусство складывания поделок и фигур из бумаги. При всей его древности, математическая сторона оригами была исследована совсем недавно, лишь в XX веке. Оказалось, что хотя такие поделки может сложить (и в действительности складывает!) любой школьник, математика оригами выходит далеко за школьный уровень. В частности, возможности оригами в области геометрических построений при всей кажущейся примитивности превосходят возможности циркуля и линейки. Например, оказываются легко разрешимыми знаменитые задачи о трисекции угла и об удвоении куба. На абстрактном алгебраическом уровне оригами позволяет решать уравнения до третьей степени включительно.

# Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>Основные обозначения и соглашения</b>	<b>4</b>
<b>1 Некоторые сведения из геометрии</b>	<b>6</b>
1.1 Парабола как геометрический объект . . . . .	7
1.2 Преобразование инверсии и его свойства . . . . .	10
1.3 Алгебра правильных многоугольников . . . . .	14
Упражнения к главе 1 . . . . .	16
<b>Дополнительные обозначения</b>	<b>17</b>
<b>2 Правила Фудзиты</b>	<b>18</b>
Упражнения к главе 2 . . . . .	24
<b>3 Геометрия оригами (система ОПФ)</b>	<b>25</b>
Упражнения к главе 3 . . . . .	28
<b>4 Важнейшие построения</b>	<b>29</b>
4.1 Перенос отрезков и углов . . . . .	29
4.2 Равносторонний треугольник . . . . .	30
4.3 Квадрат . . . . .	31
4.4 Построение четвёртой пропорциональной . . . . .	32
4.5 Инверсия точки относительно окружности . . . . .	34
4.6 Построение угла по его косинусу . . . . .	35
Вывод по главе 4 . . . . .	36
Упражнения к главе 4 . . . . .	36
<b>5 Задача о делении отрезка</b>	<b>37</b>
5.1 Оригами-версия метода Дюрера . . . . .	37
5.2 Индуктивное деление методом Хаги . . . . .	39
5.3 Золотое сечение . . . . .	40
Упражнения к главе 5 . . . . .	42
<b>Авторское отступление</b>	<b>43</b>

<b>6</b>	<b>Оригами и алгебра</b>	<b>44</b>
6.1	Квадратное уравнение . . . . .	44
6.2	Среднее геометрическое и квадратный корень . . . . .	46
6.3	Кубическое уравнение . . . . .	47
6.4	Кубический корень . . . . .	49
6.5	«Флорентийские степени» . . . . .	51
	Вывод по главе 6 . . . . .	52
	Упражнения к главе 6 . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Задача о двух окружностях</b>	<b>54</b>
7.1	Инверсионный подход . . . . .	55
7.2	«Чисто эвклидов» подход Геретшлегера . . . . .	57
	Вывод по главе 7 . . . . .	58
	Упражнения к главе 7 . . . . .	59
<b>8</b>	<b>«Великие задачи»</b>	<b>60</b>
8.1	Удвоение куба . . . . .	60
8.2	Трисекция угла . . . . .	62
	Вывод по главе 8 . . . . .	64
	Упражнения к главе 8 . . . . .	64
<b>9</b>	<b>Правильные многоугольники</b>	<b>65</b>
9.1	Общий приём . . . . .	65
9.2	От трёх до девяти . . . . .	66
	Вывод по главе 9 . . . . .	69
	Упражнения к главе 9 . . . . .	69
<b>10</b>	<b>Теоремы о построимости</b>	<b>70</b>
10.1	Построимые числа . . . . .	70
10.2	От оригами к циркулю и линейке . . . . .	71
10.3	От циркуля и линейки к оригами . . . . .	71
10.4	Построимые многоугольники . . . . .	72
	Упражнения к главе 10 . . . . .	73
	<b>Заключение</b>	<b>74</b>
	<b>A История алгебраических уравнений</b>	<b>75</b>
	<b>B Оригами и динамическая геометрия</b>	<b>78</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>80</b>

# Предисловие

Искусство складывания бумаги в наши дни живо и популярно: на полках книжных магазинов можно без всякого труда найти немало книг со словом «оригами» на обложке, но... их содержание не имеет ничего с предметом наших последующих обсуждений.

Все эти книжки представляют собой заурядные сборники рецептов поделок, придуманных чаще всего отнюдь не их авторами. Мы же будем говорить о *математике*, стоящей за древним японским искусством.

Всякое складывание листа бумаги оставляет на нём след — некоторую линию. Следовательно, можно говорить о том, что оригами есть совокупность методов геометрических построений таких линий.

Методы эти необычны тем, что они не используют никаких инструментов — в отличие, скажем, от пресловутых *циркуля-и-линейки*. При этом, что самое интересное, их возможности довольно широки — во всяком случае, они заметно превосходят те же самые циркуль и линейку. Скоро мы увидим, почему это так, и каковы границы этих возможностей.

Для описания самих построений нам придётся ввести специальный язык символов, который выглядит, быть может, немного устрашающе, однако в действительности гораздо удобнее и лаконичнее длинных словесных описаний типа «а теперь перегните лист бумаги так, чтобы линия сгиба проходила через такой-то его угол, и после сгибания такие-то точки оказались совмещёнными на просвет...»

Предлагаемый материал по сложности почти не выходит за рамки школьного курса геометрии девяти классов. «Почти» — потому что в одном случае (см. § 6.3) будет явным образом использоваться понятие о касательных и их уравнениях (материал десятого класса). По содержанию же материал значительно шире школьного курса.

Вся перечисленная в конце литература доступна в электронном виде; для каждого указанного источника перечислены номера страниц, где этот источник упоминается.

# Основные обозначения и соглашения

Любую систему геометрических построений принято сравнивать с «эвклидовыми» построениями циркулем и линейкой — мы тоже займёмся этим, и для краткости будем ссылаться на циркуль-линейку аббревиатурой ЦЛ. Наша же система будет называться ОПФ — «оригами по правилам Фудзиты». Кто такой Фумияки Фудзита и в чём заключается суть носящих его имя правил, будет сказано в главе 2.

Из всего многообразия геометрических объектов мы будем иметь дело главным образом с точками и прямыми, которыми в действительности можно задавать и гораздо более сложные понятия вроде парабол, окружностей и т.п.

Условимся обозначать точки *заглавными* буквами латинского алфавита:  $A, \dots, Z$ . Двумя последовательно указанными точками будет, как обычно, обозначаться отрезок либо его длина:  $AB = 2$ .

Прямые будем обозначать *строчными* латинскими буквами:  $a, b, c, \dots$ . Буквы  $x, y, z$  зарезервируем для привычного обозначения декартовых координат и/или неизвестных величин в уравнениях; буквы  $i, j, k, m, n$  — для натуральных и целых чисел.

Числовые константы будем обозначать строчными греческими буквами:  $\alpha, \dots, \omega$ . Во всех трёх случаях — точки, прямые, числа, — при необходимости могут использоваться индексы и штрихи.

Взаимное расположение точек и прямых будем описывать при помощи центральных многоточий. Запись

$$A \cdots a \cdots B$$

означает, что точки  $A$  и  $B$  лежат *по разные стороны* от прямой  $a$ ; запись

$$A \cdots \{B, C\},$$

что обе точки  $B$  и  $C$  находятся на прямой или луче *по одну сторону* относительно точки  $A$ , и т.п.

Пересечения линий будем изображать символом « $\times$ ». Так, запись

$$AB \times a \rightarrow C$$

следует читать «точку пересечения отрезка  $AB$  и прямой  $a$  обозначим  $C$ ».

Если какой-то объект может быть построен с известной степенью произвольности, будем при его описании пользоваться символом « $\forall$ ». Например,

$$\forall D$$

означает «отметим на чертеже произвольную точку  $D$ », запись

$$\forall b \ni D$$

требует провести через точку  $D$  произвольную прямую  $b$ , а запись

$$\forall G \in b$$

предписывает на прямой  $b$  отметить любую точку  $G$ . При этом возможно указание дополнительных условий например

$$\forall G \in b: G \neq D$$

или, уже с потерей произвольности,

$$G \in b: DG = 1.$$

Наконец, символ «&» будет означать соединение объектов, построений или условий, вроде

$$C \in a: BC = 1 \quad \& \quad A \dots B \dots C$$

(отметить на  $a$  точку  $C$  такую, что  $BC = 1$  и точка  $B$  находится между  $A$  и  $C$ ).

# Глава 1

## Некоторые сведения из геометрии

Для дальнейшего изложения нам понадобится знание геометрических свойств некоторых кривых и преобразований, относительно которых нельзя не процитировать книгу [9, гл. IV, § 8.1]:

*Несмотря на простоту и изящество этих свойств, академическая инерция до настоящего времени служит препятствием их проникновению в школьное преподавание.*

Со времён написания этих слов прошло более шестидесяти лет, однако ситуация никак не изменилась...

Построения, требуемые в материале данной главы, могут быть выполнены *любыми* геометрическими средствами — например, циркулем и линейкой. Все необходимые для этого методы описаны в [8].

Нам также понадобится результат, который звучит достаточно тривиально, однако не всегда<sup>1</sup> входит в современный школьный курс геометрии. Сформулируем его в виде следующей теоремы:

**Теорема 1.** *Симметрия относительно прямой сохраняет неизменными расстояния и углы.*

Докажем сначала утверждение относительно расстояний. Пусть  $A, B$  — некоторые точки, а  $A'$  и  $B'$  — их симметричные образы относительно прямой  $a$ . Возможны два случая взаимного расположения точек и прямой: либо точки лежат от неё по одну сторону (включая сюда и размещение точки на прямой), либо по разные стороны.

Доказательство показано на рис. 1.1. В первом случае (левый чертёж) проведём к  $a$  параллели через *ближние* точки. Прямоугольники  $O_A K B O_B$  и  $O_A K' B' O_B$  равны, так что  $KB = K'B'$  и  $KO_A = K'O_A$ . Отсюда и  $AK = A'K'$ .

Значит, имеет место равенство прямоугольных треугольников  $\triangle АКВ = \triangle А'К'В'$  по двум катетам, а следовательно, у них равны и гипотенузы:  $AB = A'B'$ .

---

<sup>1</sup>Это свойство рассматривалось и доказывалось школьникам прежде — например, его можно найти в учебнике А. Погорелова 1995 года издания, хотя и в довольно-таки неудобопонятном виде. Однако в ряде нынешних учебников оно отсутствует.



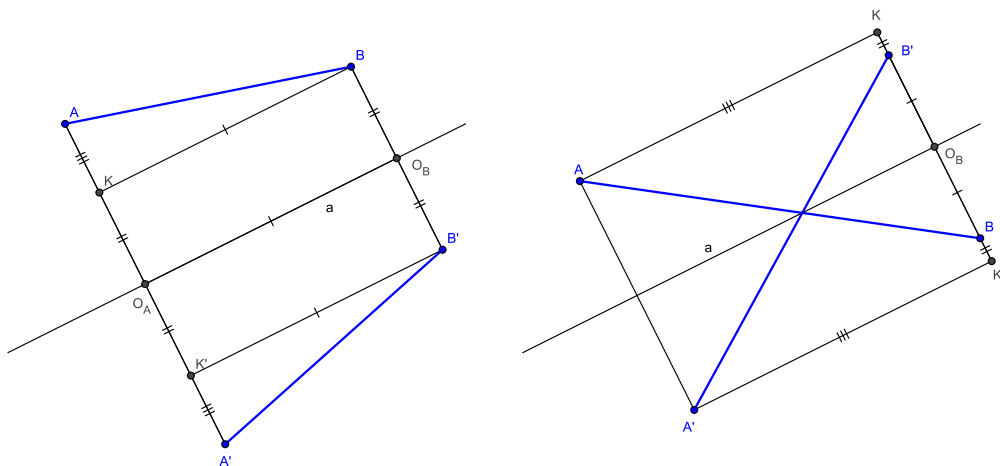


Рис. 1.1: инвариантность расстояния при симметрии.

(Если точки лежат на одинаковом расстоянии от прямой, то отпадает необходимость в рассмотрении треугольников, а если одна из точек находится на прямой, то не нужно предварительно рассматривать прямоугольники. Если на прямой находятся *обе* точки, то утверждение очевидно.)

Во втором случае (правый чертёж) параллели к  $a$  проводятся через *дальние* точки и аналогично показывается равенство прямоугольных треугольников  $\triangle АКВ = \triangle A'K'B'$  также по двум катетам.

Чтобы доказать утверждение относительно углов, достаточно рассечь исходный угол произвольной прямой, образовав треугольник. Симметричный ему треугольник будет тогда равен исходному по трём сторонам. Тем самым теорема доказана полностью.

## § 1.1. Парабола как геометрический объект

В школьной математике о параболе обычно говорят, как о графике квадратичной функции

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0 \quad (1.1)$$

или, реже, как о линии, образующейся при сечении конуса плоскостью, параллельной его образующей (рис. 1.2). Нам, однако, понадобится представление о параболе, как о геометрическом объекте на плоскости.

Заметим прежде всего, что квадратный трёхчлен может быть записан в виде

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \left( \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right),$$

а уравнение (1.1), соответственно, — в виде

$$y - \left( \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right) = \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2.$$

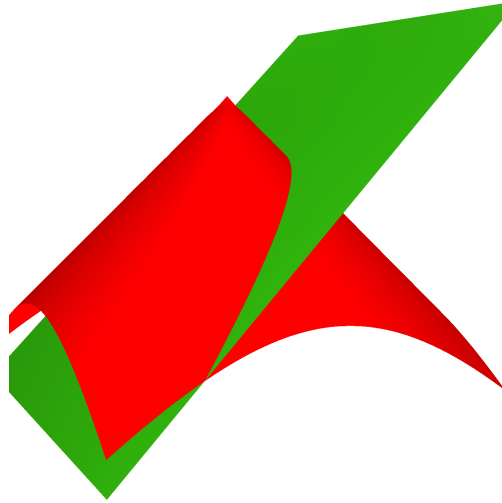


Рис. 1.2: парабола как коническое сечение.

Делая в нём замену переменных

$$\tilde{y} = y - \left( \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right), \quad \tilde{x} = \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2,$$

означающую перенос начала координат, получаем гораздо более простую его форму  $\tilde{y} = \alpha\tilde{x}^2$ .

Итак, не теряя общности, вместо (1.1) вполне достаточно ограничиться рассмотрением уравнения

$$y = \alpha x^2. \quad (1.2)$$

Для изучения свойств этой линии отметим на плоскости точку  $A(0, \frac{1}{4\alpha})$  и проведём прямую  $y = -\frac{1}{4\alpha}$ .

Зададимся теперь произвольной точкой параболы. В соответствии с (1.2), это точка  $B(x, \alpha x^2)$ . Найдём расстояния от неё до точки  $A$  и до прямой  $a$ , опустив на последнюю перпендикуляр  $B'B$  (рис. 1.3):

$$AB = \sqrt{x^2 + \left( \alpha x^2 - \frac{1}{4\alpha} \right)^2},$$

$$B'B = \alpha x^2 + \frac{1}{4\alpha}.$$

Возводя эти выражения в квадрат и раскрывая скобки в  $AB$ , получаем

$$AB^2 = x^2 + \alpha^2 x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16\alpha^2},$$

$$B'B^2 = \alpha^2 x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16\alpha^2} = AB^2.$$

Как видно,  $AB = B'B$ , и именно это равенство является геометрическим определением параболы. Точка  $A$  называется её *фокусом*, а прямая  $a$  — её *директрисой*.

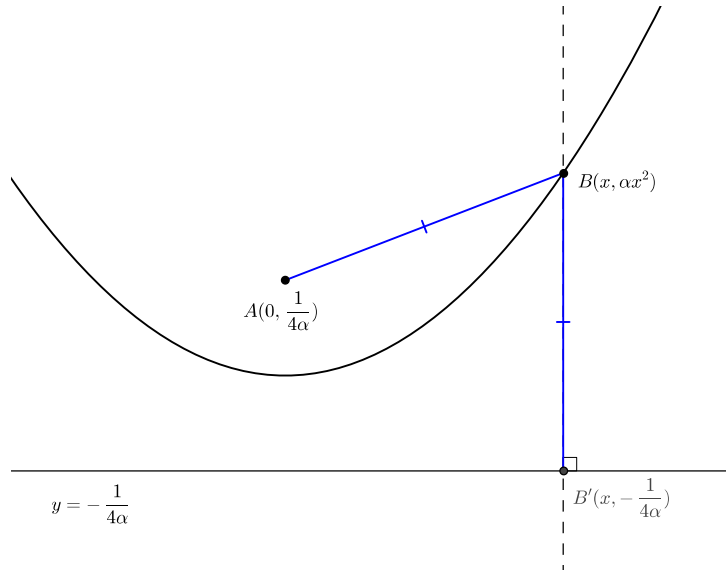


Рис. 1.3: геометрическое определение параболы.

**Определение 1.** *Параболой называется геометрическое место точек, равноотстоящих от фокуса (фиксированной точки) и директрисы (фиксированной прямой).*

Разумеется, директриса и фокус параболы могут лежать на плоскости произвольным образом. При этом если фокус оказывается лежащим на директрисе, то парабола вырождается в прямую — перпендикуляр к директрисе через точку фокуса. Применительно к коническому сечению эта ситуация возникает, когда плоскость не пересекает конус, а лишь касается его.

С касанием связано важное свойство параболы, на которое мы в дальнейшем будем ссылаться. Сейчас мы докажем, что биссектриса угла  $\angle AVB'$  является касательной к параболе.

Предположим от противного, что эта биссектриса не касается параболы, а пересекает её ещё в какой-то другой точке  $C \neq B$  (рис. 1.4).

Опустим из этой точки перпендикуляр на директрису в точку  $C'$ . Поскольку  $C$  лежит на параболе, по определению должно выполняться равенство  $AC = CC'$ .

С другой стороны, и  $AB = BB'$ , так что треугольник  $\triangle AVB'$  является равнобедренным. Его биссектриса  $BC$  одновременно оказывается и серединным перпендикуляром к стороне  $AB'$ , так что любая лежащая на нём точка — в том числе и  $C$  — одинаково отстоит от  $A$  и  $B'$ . Иными словами,  $AC = CB'$ .

Из двух равенств делаем вывод  $CC' = CB'$ . Но  $C'$  и  $B'$  лежат на директрисе,  $CC'$  есть расстояние от точки  $C$  до директрисы, а расстояние от точки до прямой достигается лишь на перпендикуляре к этой прямой через эту точку. Получается, что треугольник  $\triangle CC'B'$  содержит два прямых угла, чего не может быть. Этим противоречием и доказывается утверждение.

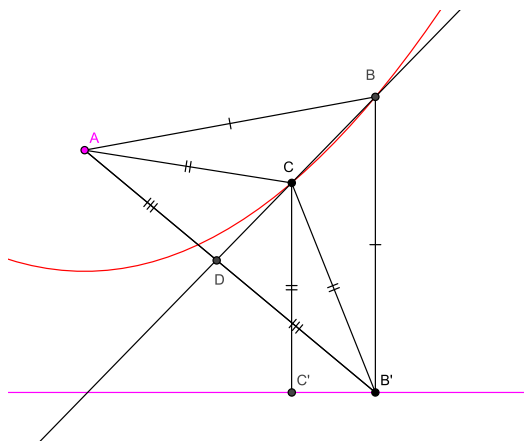


Рис. 1.4: касание параболы.

Справедливо и обратное. Выберем на директрисе параболы произвольную точку, соединим её с фокусом и проведём к этому отрезку серединный перпендикуляр. Он будет являться медианой, биссектрисой и высотой некоторого равнобедренного треугольника с третьей вершиной на параболы, и в качестве биссектрисы будет касаться параболы.

Тем самым мы доказали следующую теорему:

**Теорема 2.** Для произвольного отрезка, соединяющего фокус параболы с её директрисой, серединный перпендикуляр к этому отрезку касается параболы.

Это свойство параболы иногда называется *оптическим*. Его можно доказать и с помощью дифференциального исчисления, проверив что угловой коэффициент уравнения биссектрисы  $BD$  совпадает с производной функции  $y = \alpha x^2$  в точке  $B$ .

С другими свойствами параболы (в том числе и непосредственно относящимися к оригами!) можно познакомиться в [5, гл. XIII.II].

## § 1.2. Преобразование инверсии и его свойства

Для изучения прямых и окружностей, возникающих при геометрических построениях, очень полезной оказывается так называемая инверсия<sup>2</sup> — преобразование, выполняемое по следующему принципу:

**Определение 2.** Пусть на плоскости задана окружность с центром  $O$  и радиусом  $\rho$ . Инверсией точки  $A$  относительно этой окружности называется такая точка  $A'$ , которая лежит на луче  $OA$  и удовлетворяет условию

$$OA \cdot OA' = \rho^2. \quad (1.3)$$

<sup>2</sup>Содержание этого параграфа во многом повторяет [9, гл. III, § 4.2], особенно в части доказательства теоремы 3.

В частности, при  $\rho = 1$  (инверсия относительно единичной окружности) расстояния  $OA$  и  $OA'$  оказываются взаимно обратными:  $OA \cdot OA' = 1$ .

Окружность, относительно которой выполняется это преобразование, называется *инвертором*. Нетрудно заметить, что любая лежащая на ней точка всегда переходит в саму себя. Образы точек, лежащих вне окружности, попадают внутрь её, и наоборот.

Для всех случаев повторное применение отображения всегда приводит к возвращению в исходную точку:

$$A \xrightarrow{O,\rho} A' \xrightarrow{O,\rho} A'' \equiv A. \quad (1.4)$$

Построить инверсию точки относительно окружности можно с помощью следующего алгоритма:

1. Провести прямую  $OA$ ;
2. Провести перпендикуляр к  $OA$  через точку  $O$  до пересечения с окружностью в точке  $B$ ;
3. Провести отрезок  $AB$ ;
4. Провести перпендикуляр к  $AB$  через точку  $B$  до пересечения с прямой  $OA$  в точке  $C$ ;
5. Построить точку  $A'$ , симметричную с точкой  $C$  относительно точки  $O$ .

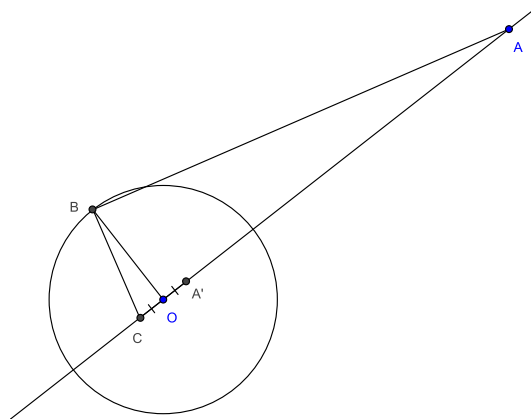


Рис. 1.5: инверсия точки относительно окружности.

Это построение изображено на рис. 1.5, а доказательство его правильности основано на подобии треугольников.

Действительно, треугольники  $\triangle ABC$  и  $\triangle BOC$  являются прямоугольными и имеют общий острый угол:  $\angle BAC = \angle CBO$ . Поэтому они подобны и для их сторон справедлива пропорция

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA},$$

откуда вытекает равенство

$$OC \cdot OA = OB^2 = \rho^2.$$

Учитывая что в силу симметрии  $OC = OA'$ , отсюда получаем (1.3).

Рассматривая произвольную линию как геометрическое место точек и находя их инверсии, можно найти образ всей линии. В этой связи нам понадобится так называемое *круговое свойство*, формулируемое в виде следующей теоремы:

**Теорема 3 (Круговое свойство).** *Инверсией прямой, проходящей через центр инвертора, является сама эта прямая. Инверсией прямой, не проходящей через центр инвертора, является проходящая через него окружность, и наоборот. Инверсией окружности, не проходящей через центр инвертора, является окружность, также не проходящая через него.*

Первое утверждение теоремы очевидно, оно следует из того, что исходная точки и её инвертированный образ по определению лежат на одной прямой. Конечно, их взаимные положения отличаются, но прямая в целом остаётся собой.

Доказательство второго утверждения показано на рис. 1.6. Опустим на прямую  $a$  перпендикуляр из  $O$  в точку  $A$  и построим её инвертированный образ  $A'$ . Выберем на прямой произвольную точку  $B \in a$  и найдём её образ  $B'$ .

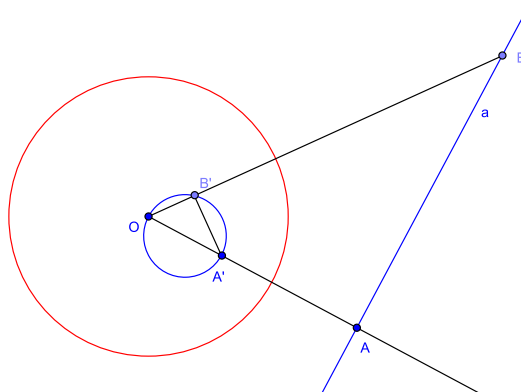


Рис. 1.6: инверсия прямой, не проходящей через центр инвертора.

По определению инверсии,  $OA' \cdot OA = OB' \cdot OB = \rho^2$ , откуда вытекает равенство

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OB}{OA},$$

означающее подобие треугольников  $\triangle OB'A'$  и  $\triangle OAB$ . Следовательно, у них равны углы  $\angle OB'A'$  и  $\angle OAB$ , из которых второй по построению является прямым.

Итак,  $\angle OB'A' = 90^\circ$ . В силу произвольности выбора точки  $B$  и по теореме Фалеса о прямом угле, опирающемся на диаметр, геометрическим местом точек  $B'$  оказывается окружность с диаметром  $OA'$ . Она и является образом прямой  $a$ ;

при этом из (1.4) следует обратное: образом окружности, проходящей через  $O$ , является не проходящая через  $O$  прямая.

Осталось доказать третье утверждение теоремы относительно образа окружности, не проходящей через центр инвертора. Эта ситуация показана на рис. 1.7.

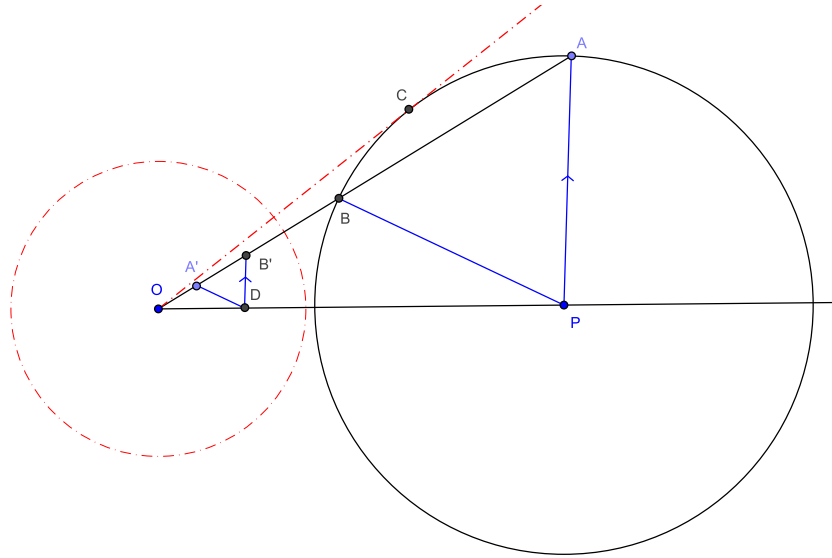


Рис. 1.7: инверсия окружности, не проходящей через центр инвертора.

Пусть окружность-инвертор имеет своим центром точку  $O$ , а окружность-прообраз точку  $P$ , и радиус последней равен  $\sigma$ . Положим  $OP = \mu$ . Проведём луч  $OP$  и построим касательную к прообразу через точку  $O$ . Пусть касание происходит в точке  $C$  и  $OC = \tau$ .

Проведём из  $O$  произвольный луч, пересекающий окружность-прообраз в точках  $A$  и  $B$ . Найдём их образы  $A'$  и  $B'$ . Обозначим  $OA = \alpha$ ,  $OB = \beta$ ,  $OA' = \tilde{\alpha}$ ,  $OB' = \tilde{\beta}$ .

По определению инверсии,

$$OA \cdot OA' = \alpha \tilde{\alpha} = OB \cdot OB' = \beta \tilde{\beta} = \rho^2,$$

а по свойству касательной к окружности<sup>3</sup>

$$OA \cdot OB = \alpha \beta = OC^2 = \tau^2.$$

Деля первые равенства на второе, обнаруживаем

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\beta} = \frac{\tilde{\beta}}{\alpha} = \frac{\rho^2}{\tau^2} = \psi^2,$$

<sup>3</sup>Квадрат касательной ( $OC$ ) равен произведению секущей ( $OA$ ) на её внешнее дополнение до точки касания ( $OB$ ). Прежде это свойство окружности входило в школьную программу, но за последние годы исчезло из ряда учебников. Соотношение без труда выводится из подобия треугольников  $\triangle OAC$  и  $\triangle OBC$ .

то есть это соотношение не зависит от точек  $A, B$  и выбора секущего луча.

Теперь проведём параллель к  $AP$  через точку  $B'$  до пересечения с  $OP$  в точке  $D$ . Положим  $OD = \xi$ ,  $B'D = \zeta$ . Из подобия треугольников  $\triangle ODB'$  и  $\triangle OPA$  получаем

$$\frac{OD}{OP} = \frac{\xi}{\mu} = \frac{OB'}{OA} = \frac{\tilde{\beta}}{\alpha} = \frac{B'D}{AP} = \frac{\zeta}{\sigma}.$$

Отсюда

$$\xi = OD = \frac{\mu\tilde{\beta}}{\alpha} = \mu\psi^2 \quad \text{и} \quad \zeta = B'D = \frac{\sigma\tilde{\beta}}{\alpha} = \sigma\psi^2.$$

Это означает, что положение точки  $D$  и расстояние  $B'D$  не зависят от выбора секущего луча. Аналогично рассматривая треугольники  $\triangle ABP$  и  $\triangle A'B'D$ , можно показать, что  $A'D = \sigma\psi^2 = B'D$ .

Итак, каким бы не был секущий луч, образы точек в сечении будут находиться на одинаковом расстоянии от фиксированной точки. Это и есть окружность-образ. Тем самым теорема доказана полностью.

Из определения инверсии и только что доказанной теоремы 3 следуют несложные способы нахождения образов прямых и окружностей.

Если прямая проходит через центр инвертора, то построений не требуется. Она сама является своим образом.

Если прямая не проходит через центр инвертора, то нужно построить к ней перпендикуляр через этот центр  $O$ . Пусть он пересекает её в точке  $A$ . Построить  $A'$  — инверсию этой точки. Затем на отрезке  $OA'$ , как на диаметре, построить окружность-образ.

Если окружность проходит через центр инвертора  $O$ , то нужно построить её диаметр  $OA$ . Построить  $A'$  — инверсию точки  $A$ . Построить прямую-образ, проходящую через  $A'$  и перпендикулярную к  $OA'$ .

Если окружность не проходит через центр инвертора, то нужно построить её диаметр, продолжение которого проходит через этот центр. Построить инверсии его концов, соединить их отрезком. На этом отрезке, как на диаметре, построить окружность-образ.

Об инверсии окружностей см. также [5, гл. XIII. I].

### § 1.3. Алгебра правильных многоугольников

*Предупреждение читателю: материал данного параграфа практически без изменений повторяет [8, §7.2]. В случае предварительного знакомства с [8] можно сразу переходить к следующей главе.*

Всякий правильный  $n$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_n$  вполне однозначно характеризуется величиной своего центрального угла:

**Определение 3.** *Центральным углом правильного многоугольника называется угол между отрезками, соединяющими центр описанной вокруг него окружности с двумя соседними вершинами  $A_k$  и  $A_{k+1}$ .*



Очевидно, каждый такой угол заключен между нулём и  $180^\circ$ , и нам будет удобно вместо самих углов иметь дело с их косинусами: в указанном интервале косинусоида представляет собой взаимно однозначную функцию, и по заданному  $x \in [0, 1]$  с помощью единичной окружности легко построить такой угол  $\theta$ , что  $x = \cos \theta$  (см. рис. 1.8)

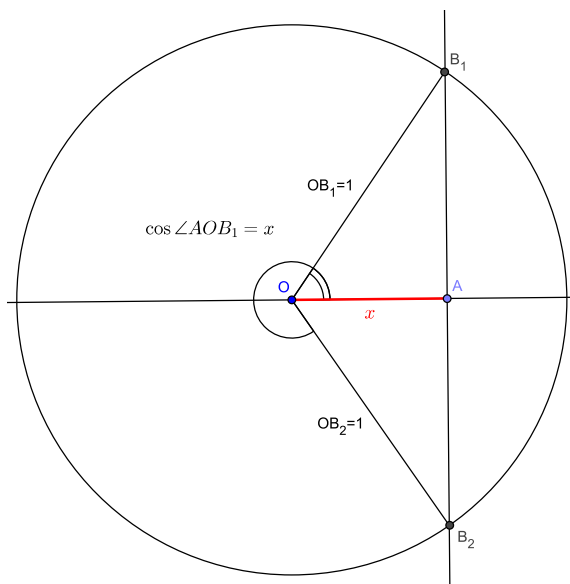


Рис. 1.8: построение угла по его косинусу.

Рассмотрим и преобразуем известную формулу для косинуса двойного угла, воспользовавшись в ней тождеством тригонометрической единицы:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1. \quad (1.5)$$

Эту формулу можно записать и по-другому:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x.$$

Итак, при известном  $\cos \theta = x$  для построения половинного угла (т.е. его косинуса  $\cos \frac{\theta}{2} = z$ ) необходимо решить квадратное уравнение  $2z^2 = 1 + x$  относительно  $z$ .

Положим  $\theta = 360^\circ$ , тогда  $x = \cos \theta = 1$  и  $2z^2 = 2$ . Это уравнение имеет два вещественных корня  $z_1 = 1$  и  $z_2 = -1$ . Трактруя их как  $z_1 = 1 = \cos 0^\circ$  и  $z_2 = -1 = \cos 180^\circ$ , получаем два угла, лучи которых делят полный круг пополам.

Аналогичным образом рассмотрим косинус тройного угла:

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x.$$

Подставляя сюда ранее найденное соотношение (1.5), формулу синуса двойного угла  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  и опять пользуясь тригонометрической единицей, получаем

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

или, что то же самое,

$$4 \cos^3 \frac{x}{3} - 3 \cos \frac{x}{3} = \cos x. \quad (1.6)$$

Для полного круга имеем кубическое уравнение  $4z^3 - 3z = 1$  с очевидным корнем  $z_1 = 1$ . Сокращая на  $z - 1$ , приходим к квадратному уравнению с кратным корнем  $z_2 = z_3 = -\frac{1}{2}$ . Эти корни можно трактовать, как косинусы углов  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  и  $240^\circ$ , лучи которых делят полный круг на три части.

Далее, аналогично

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1, \quad (1.7)$$

$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x \quad \text{и т.п.} \quad (1.8)$$

Обобщая, получаем следующий факт: *геометрическая задача деления угла на некоторое количество равных частей алгебраически эквивалентна решению уравнения соответствующей степени*. Если полный угол  $360^\circ$  делится на  $n$  частей, то уравнение будет иметь  $n$  вещественных корней-косинусов, углы которых образуют звезду на вершины правильного  $n$ -угольника; одним из углов всегда будет нулевой.

Этот факт со всей строгостью обосновывается в теории функций комплексных переменных (ТФКП); краткое изложение см. [9, гл. II, §5].

## Упражнения к главе 1

**Упражнение 1.** На чертеже дана парабола и её директриса. Пользуясь циркулем и линейкой, найдите фокус параболы.

**Упражнение 2.** На чертеже дана парабола и указан её фокус. Пользуясь циркулем и линейкой, постройте директрису параболы.

**Упражнение 3** (для знакомых с понятием производной). Докажите, что касательная к параболе  $y = ax^2$ , построенная при  $x = x_0$ , пересекает ось абсцисс при  $x = x_0/2$ .

**Упражнение 4.** Докажите использованное в доказательстве теоремы 3 (см. сноску на предыдущей странице) утверждение о связи длин касательной и секущей.

**Упражнение 5.** Не пользуясь подобием треугольников, докажите частный случай того же утверждения для диаметральной секущей.

**Упражнение 6.** Окружность не проходит через центр инвертора. Покажите, что образ её центра не совпадает с центром её образа.

**Упражнение 7.** Выведите тождества (1.7) и (1.8).

**Упражнение 8.** Покажите, что с помощью некоторых алгебраических ухищрений задачу построения угла  $\frac{360^\circ}{2n+1}$  можно свести к решению алгебраического уравнения  $n$ -ой степени.

## Дополнительные обозначения

Помимо точек и прямых, обозначения для которых уже были введены в начале, нам придётся иметь дело с параболой и окружностями.

Мы знаем уже, что парабола вполне однозначно определяется своим фокусом (точкой) и директрисой (прямой). Пусть её фокус находится в точке  $A$ , а директрисой является прямая  $a$ . Условимся обозначать такую параболу следующим образом:

$\overset{\circ}{A}a$ .

Надстрочный знак над директрисой будет напоминать, что речь идёт о кривой.

Окружность может быть задана разными способами, но для нас наиболее удобным будет способ «по центру и точке на окружности». Пусть её центром является точка  $A$  и известна лежащая на ней точка  $B$ . Для такой окружности будем пользоваться обозначением

$\overset{\circ}{A}B$ .

Надстрочный знак будет указывать, какая именно из двух точек является центром, и напоминать о том, что речь идёт не об отрезке. Очевидно,  $\overset{\circ}{A}B \neq \overset{\circ}{B}A$ .

**Упражнение 9.** Докажите, что образом окружности  $\overset{\circ}{A}B$  при инверсии относительно окружности  $\overset{\circ}{B}A$  является серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ .

## Глава 2

### Правила Фудзиты

Классическое оригами является искусством складывания бумаги, и с элементарными основами этого искусства знаком, наверное, каждый. Действительно, трудно представить себе человека, который хоть однажды в жизни не складывал бы из бумажного листа кораблик, самолётик или хлопушку.

Рассмотрим для примера складывание самолётика. Существует немало вариантов, но наиболее известные начинаются со следующей последовательности действий. Пусть стороны бумажного листа образованы прямыми  $a, b, c, d$ , а его углы обозначены точками  $A, B, C, D$  (рис. 2.1).

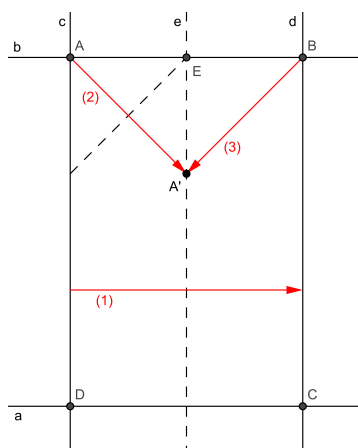


Рис. 2.1: складывание самолётика из бумаги (начало).

Сначала лист складывается так, чтобы длинные стороны (прямые  $c$  и  $d$ ) совместились между собой. При этом образуется складка  $e$ , которая будет осью симметрии будущего самолётика. Точку её пересечения с короткой стороной  $b$  обозначим  $E$ .

Затем угол листа  $A$  отгибается так, чтобы он лёг на только что построенную складку  $e$ , заняв позицию  $A'$ . Если самолётик предполагается остроносым, то линия отгиба должна проходить через точку  $E$ .

Аналогичный отгиб выполняется с другой стороны, но теперь задача упрощается: достаточно совместить угол листа В с позицией А'.

Остановимся на этом. Сказанного уже достаточно, чтобы увидеть: складывание бумаги в оригами выполняется так, чтобы по определённым правилам совмещались ранее построенные или изначально имевшиеся элементы фигуры. Мы сейчас пользовались тремя такими правилами:

- Складыванием совместить две прямые;
- Складыванием совместить точку и прямую, так чтобы складка проходила через другую точку;
- Складыванием совместить две точки.

В 1991 году оригамист и математик Фумияки Фудзита<sup>1</sup> задался целью формально определить и классифицировать *все* правила складывания в оригами.

Он насчитал шесть таких правил, из которых одно (шестое, самое сложное и интересное) было уже изучено в 1930-х годах Маргаритой Пьяццола Вэлох. Однако в 2001 году случился конфуз.

Другой математик и оригамист Косиро Хатори указал седьмое правило, не замеченное никем за прошедшие десять лет. Конфуз оказался тем более громким, что выяснилось — ещё в 1989 году Жак Жюстен нашёл и опубликовал все эти же семь правил, но его сообщение тогда было никем не замечено из-за крайне малой популярности французского языка среди математиков и оригамистов.

Хатори также продемонстрировал [2], что из того самого шестого правила могут быть выведены все остальные. Позднее в 2003 году Роберт Лэнг доказал [1], что этими правилами описываются *все* возможные действия в оригами.

С тех пор закрепился термин «правила Фудзиты—Жюстена», причём иногда вместо слова «правила» говорят «аксиомы» (англ. HJA, Huzita—Justin Axioms). Формально это неверно, так как допускаются слишком большие вольности (отбрасывание шести правил из семи никак не влияет на результат!), однако такое именование нельзя считать и большой ошибкой. Достаточно помнить, что аксиоматично только одно правило, а остальные нужны лишь для большего удобства восприятия.

Прежде чем рассматривать правила Фудзиты, остановимся на немаловажном вопросе. Он гораздо сложнее, чем может показаться:

*Вправе ли мы считать складки, образующиеся на листе бумаги при его перегибании, прямыми линиями, и если да, то почему?*

На первую половину вопроса интуиция немедленно отвечает положительно, однако со второй половиной дело обстоит гораздо хуже.

Объяснение, предлагаемое во многих книгах, сводится к тому, что прямая является кратчайшим расстоянием между двумя точками, однако оно совершенно

---

<sup>1</sup>Будучи по рождению японцем, Фудзита впоследствии эмигрировал в Италию. Тонкости японского произношения и особенности его итальянской транскрипции привели к тому, что это имя стало писаться латиницей как «Humiaki Huzita», так что у русскоязычных авторов можно иногда встретить ссылки на «правила Худзиты»...

неудовлетворительно. После него тут же возникает другой, ещё более сложный вопрос: вправе ли мы считать, что лист бумаги всегда складывается по кратчайшей?!

Будем вместо этого рассуждать следующим образом. Пусть лист бумаги сложен пополам; проколем оба получившихся «слоя» иглой насквозь в произвольном месте. Это можно рассматривать как выбор произвольной пары точек. Пока лист остаётся сложенным, позиции точек совпадают, поэтому линия сгиба (какой бы она не была) отстоит от них на равные расстояния.

Теперь расправим лист. Выбранные точки займут разные позиции, однако линия сгиба по-прежнему является равноотстоящей от них. Из элементарной геометрии известно, что таким свойством обладает лишь прямая, являющаяся серединным перпендикуляром между точками.

Это рассуждение тоже не идеально: оно исходит из предположения, что лист бумаги является евклидовой плоскостью, не деформирующейся (в смысле расстояний) при сгибании и разгибании. Однако такое допущение звучит гораздо более просто и разумно, и в дальнейшем мы примем его за постулат, а термины «прямая» и «складка» будем считать синонимами.

Описанные действия можно рассмотреть и по-другому. Пусть на чертеже имеется точка  $A$ . Перегнём чертёж произвольным образом вдоль прямой  $a$ , сложив его вдвое. Проколем его в точке  $A$ , создав на другой половине её образ  $A'$ . Очевидно, точки  $A, A'$  будут симметричны относительно  $a$ , которая в свою очередь будет являться серединным перпендикуляром для отрезка  $AA'$ .

Теперь перейдём собственно к системе правил Фудзиты.

**Правило 1.** *Каковы бы не были две точки, всегда можно построить соединяющую их складку.*

Это утверждение эквивалентно тому, что через две точки всегда можно провести прямую. Такая прямая-складка будет единственной, если точки различны, в противном же случае их будет бесконечно много.

Мы будем пользоваться следующей символической записью:

$$\Phi_1(A \& B) \rightarrow c.$$

Её следует читать так: «Согласно первому правилу Фудзиты, существует складка, проходящая одновременно через точки  $A$  и  $B$ ; построим её и обозначим  $c$ ».

**Правило 2.** *Каковы бы не были две точки, всегда можно построить совмещающую их складку.*

Иными словами, после складывания листа бумаги обе точки должны совпасть «на просвет».

Согласно приведённому выше рассуждению, совмещаемые точки будут симметричными относительно совмещающей их складки, а та, окажется для них серединным перпендикуляром. Как и в предыдущем случае, складка будет единственной при несовпадении точек, а при их совпадении таких складок становится бесконечно много — подходит любая, проходящая через эту общую точку.

Применение второго правила Фудзиты мы будем записывать следующим образом:

$$\Phi_2(A \leftrightarrow B) \rightarrow c.$$

**Правило 3.** *Каковы бы не были две прямые, всегда можно построить совмещающую их складку.*

Здесь после складывания листа бумаги «на просвет» должны совпадать не точки, а прямые, и они же должны быть симметричными относительно требуемой складки.

Эта симметрия означает, что строящаяся складка должна быть биссектрисой угла между совмещаемыми прямыми. Если прямые пересекаются, то таких складок всегда две (см. рис. 2.2), если они параллельны, то совмещающая складка единственна, а в случае совпадения прямых условию удовлетворяет бесконечно много складок.

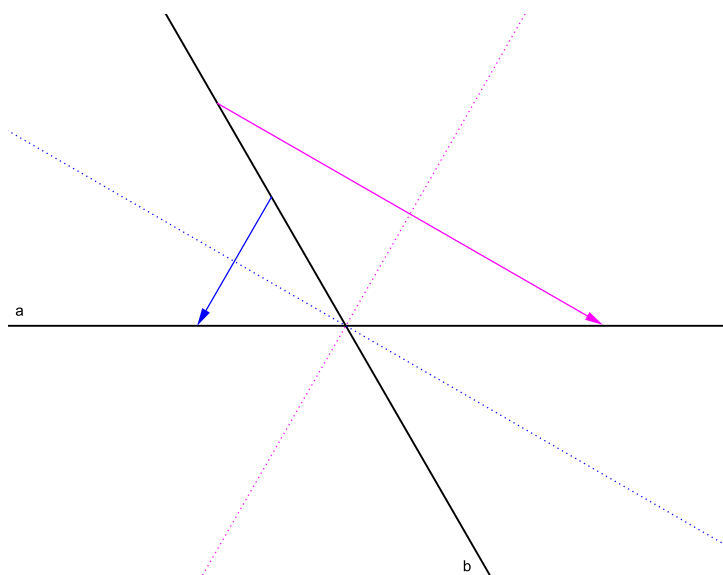


Рис. 2.2: к третьему правилу Фудзиты.

Будем записывать третье правило Фудзиты в виде

$$\Phi_3(a \leftrightarrow b) \rightarrow c$$

и при необходимости явно указывать, для какого именно угла должна быть построена биссектриса.

**Правило 4.** *Каковы бы не были точка и прямая, всегда можно построить складку, проходящую через эту точку и совмещающую прямую с ней самой.*

Совместить прямую с собой можно двумя способами: либо складка должна совпадать с этой прямой, либо быть к ней перпендикулярной. Таким образом, если точка не лежит на прямой, то четвертое правило строит перпендикуляр к прямой через эту точку. В противном случае будет построен либо перпендикуляр, либо сама прямая.

Условимся записывать построение перпендикуляра следующим образом:

$$\Phi_4(a \leftrightarrow a \mid A) \rightarrow c.$$

Если же нам по какой-то причине понадобится воспользоваться уже построенной прямой-складкой, то выбор точки на ней может быть сделан произвольно, и в этом случае проще писать

$$\Phi_4(a).$$

Заметим, что до сих пор все правила гарантировали существование требуемой складки и содержали слово «всегда». Она могла быть не единственной, но *обязательно* существовала. Последние три правила в этом смысле звучат по-другому.

**Правило 5.** *Каковы бы не были две точки и прямая, можно построить складку, проходящую через одну точку и совмещающую другую точку с прямой, — либо однозначно установить отсутствие такой складки.*

Пятое правило Фудзиты мы будем записывать в виде

$$\Phi_5(A \leftrightarrow a \mid B) \rightarrow c. \tag{2.1}$$

Чтобы выяснить его геометрический смысл, обратимся к теореме 1.

Пусть сгибание чертежа совмещает точку  $A$  с некоторой позицией  $A' \in a$ . Как мы помним,  $A$  и  $A'$  симметричны относительно  $c$ , при этом  $c \ni B$  (см. рис. 2.3), так что относительно  $c$  точка  $B$  симметрична сама себе. Согласно теореме 1,  $BA = BA'$ .

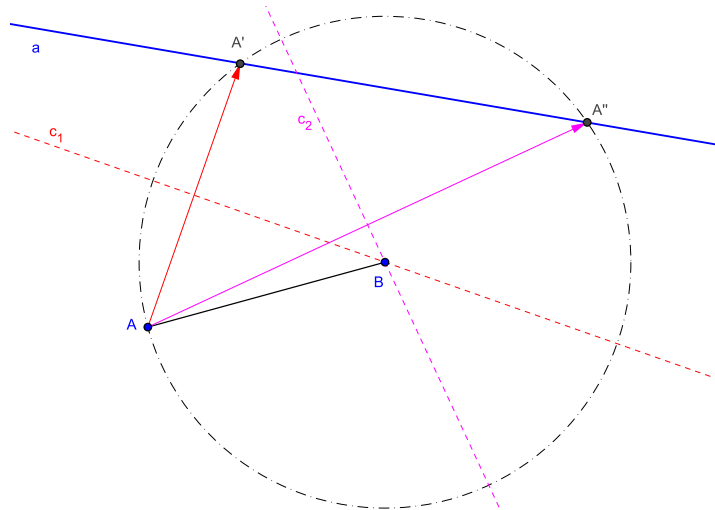


Рис. 2.3: к пятому правилу Фудзиты.

Из-за совпадения этих расстояний можно говорить о том, что точки  $A$  и  $A'$  лежат на окружности  $\overset{\circ}{B}A$ , а точка  $A'$  является пересечением этой окружности и прямой  $a$ :

$$\overset{\circ}{B}A \times a \rightarrow A'.$$



В зависимости от соотношения  $AB$  с расстоянием между  $B$  и  $a$  может существовать ещё одна подходящая точка  $A''$ , а может и не существовать ни одной.

Итак, пятое правило Фудзиты (2.1) позволяет находить точки пересечения прямой и окружности  $\dot{B}A \times a$ . Алгебраически это означает решение нелинейной системы уравнений

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения одну переменную через другую и подставляя в первое, приходим вместо системы к квадратному уравнению.

Несколько позднее мы увидим, как именно нужно пользоваться правилом  $\Phi_5$  для решения уравнений второго порядка с известными коэффициентами, а пока отметим очевидный геометрический факт: *пусть  $\lambda$  есть расстояние между точкой  $B$  и прямой  $a$ , тогда при  $\lambda > AB$  складки не существует, при  $\lambda = AB$  складка единственна, а при  $\lambda < AB$  таких складок существует две.*

**Правило 6.** *Каковы бы не были две точки и две прямые, можно построить складку, попарно совмещающую точки с прямыми — либо однозначно установить отсутствие такой складки.*

Для этого правила мы будем пользоваться обозначением

$$\Phi_6(A \leftrightarrow a \ \& \ B \leftrightarrow b) \rightarrow c, \tag{2.2}$$

а чтобы выяснить его геометрический смысл, нам придётся обратиться к результатам из § 1.1.

Пусть складывание чертежа вдоль прямой  $c$  помещает точку  $A$  в позицию  $A' \in a$ , а точку  $B$  в позицию  $B' \in b$  (рис. 2.4). Если рассматривать параболу  $A\dot{a}$ , то складка  $c$  является серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему фокус  $A$  с директрисой  $a$ , и согласно теореме 2, касается этой параболы. Но то же самое справедливо и для параболы  $B\dot{b}$ .

Итак, шестое правило Фудзиты (2.2) означает построение прямой, которая одновременно касается двух парабол  $A\dot{a}$  и  $B\dot{b}$ .

Алгебраический анализ такого построения достаточно объёмен и местами выходит за рамки школьного курса; при необходимости его можно найти в [1], разд. «Аxiom 6 and cubic curves». Позже в § 6.3 мы рассмотрим упрощённый частный случай  $a \perp b$ , а пока ограничимся упоминанием того факта, что правило  $\Phi_6$  позволяет решать кубические уравнения. Отметим также, что если складка существует, то она может не быть единственной.

**Правило 7.** *Каковы бы не были две прямые и точка, можно построить складку, совмещающую точку с одной прямой и совмещающую другую прямую с самой собой — либо однозначно установить отсутствие такой складки.*

Как уже рассказывалось, седьмое правило долгое время упускалось из виду. Это и неудивительно, так как оно может быть выражено через правила 1–5, а потому

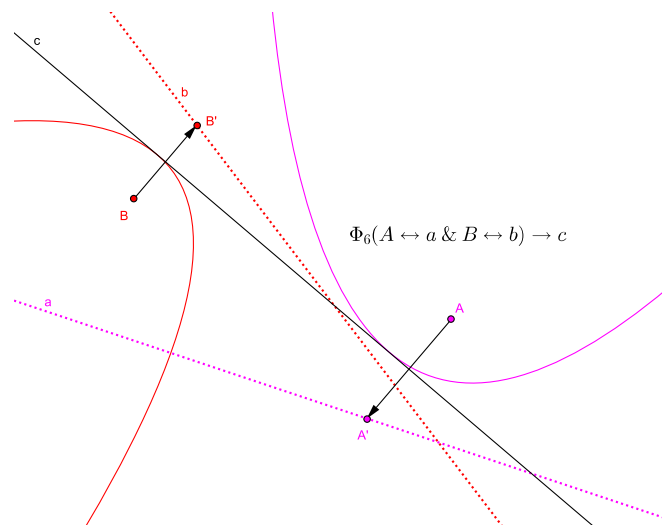


Рис. 2.4: к шестому правилу Фудзиты.

имеет смысл лишь в практическом оригами, где позволяет иногда обходиться без лишних действий и лишних складок. Теоретически же в нём нет необходимости, и мы не будем вводить для него обозначений.

Упомянем только, что в этом правиле требуемая складка существует всегда, если прямые пересекаются. Если они параллельны, то складка существует лишь при одном их взаимном положении относительно точки, а если совпадают, то точка должна лежать на них.

## Упражнения к главе 2

**Упражнение 10.** Какие правила Фудзиты использовались при складывании самолётки, изображённом на рис. 2.1?

**Упражнение 11.** Для шестого правила Фудзиты укажите примеры, в которых не существует ни одной складки и существует более одной складки.

**Упражнение 12.** Пусть седьмое правило Фудзиты<sup>2</sup> применяется к параллельным прямым. Как относительно них должна быть расположена точка, чтобы складка существовала?

**Упражнение 13.** Для седьмого правила Фудзиты опишите эквивалентную последовательность правил 1–5.

<sup>2</sup>Хотя правильнее было бы называть его правилом Жюстена—Хатори.

## Глава 3

# Геометрия оригами (система ОПФ)

В предыдущей главе были описаны правила Фудзиты, имеющие по сути аксиоматичный характер. Однако для описания геометрической системы построений мало одних аксиом — необходимо ещё описать объекты, к которым эти аксиомы применимы, и указать допустимые операции над объектами.

В данной главе мы сделаем это, оформив систему оригами-построений в виде набора постулатов. Поскольку набор правил Фудзиты избыточен, мы и здесь можем не стремиться к минимализму, пренебрегая им ради наглядности.

*Постулат 1. Чертеж представляет собой бесконечно протяжённую евклидову плоскость, свободно сгибаемую без деформаций и обладающую двусторонней прозрачностью.*

Представление о чертеже как об евклидовой плоскости достаточно логично и позволяет пользоваться всеми результатами «обычной» геометрии — фактически мы уже делали это, рассуждая о свойствах парабол, инверсий и т.п.

Бесконечная протяжённость чертежа просто-напросто гарантирует, что на нём всегда хватит места для любых требующихся объектов. В действительности складывание оригами обычно выполняется на квадратном листе бумаги или на прямоугольнике с заданным соотношением сторон — чуть позже мы увидим, что такие квадраты и прямоугольники легко могут быть построены, и при необходимости достаточно просто не выходить за их границы.

Сгибаемость чертежа без деформаций мы уже обсуждали в предыдущей главе, а его двусторонняя прозрачность упоминается лишь для того, чтобы можно было как можно проще представить себе совмещение точек и прямых при складывании. Более она ни для чего не нужна.

*Постулат 2. Объектами чертежа являются точки и прямые линии.*

Точка есть элементарное понятие, без которого, по-видимому, нельзя говорить о геометрии вообще. Прямая же — это единственный объект, который можно построить на чертеже без «внешних» инструментов (подобных, например, циркулю).

Вместе с тем, точек и прямых вполне достаточно для работы с гораздо более сложными объектами. Мы уже ввели обозначения для окружностей и парабол — а в действительности так могут быть описаны *любые* кривые второго порядка; для этого достаточно обратиться к их определениям через геометрическое место точек [9, гл. IV, § 8.1].

*Постулат 3. Прямая линия строится как результат складывания чертежа вдвое. Перед выполнением каждой следующей складки чертёж приводится в исходное (разложенное) состояние после выполнения складки предыдущей, оставляющей на нём след-прямую.*

Тот факт, что складка является прямой, мы уже обсуждали в предыдущей главе. Вторая же часть этого постулата чрезвычайно важна.

Обратим внимание, что она *не разрешает* делать новую складку по уже сложенному чертежу! По сравнению с традиционным оригами, где многократное одновременное складывание выполняется сплошь и рядом, это довольно серьёзное ограничение. Вопрос о том, что произойдёт, если такое складывание всё же разрешить, подробно рассмотрен в статье [3].

*Постулат 4. Всегда можно построить произвольную складку или произвольную складку через заданную точку.*

Этот постулат достаточно тривиален и точно соответствует утверждению о возможности проведения произвольной прямой в классической геометрии.

*Постулат 5. Для двух прямых на чертеже всегда можно найти точку их пересечения или однозначно установить её отсутствие.*

В геометрии циркуля и линейки аналогичный постулат говорит о возможности нахождения пересечений *линий*, но в нашем случае, согласно постулату 2, из всех линий имеются только прямые. Впрочем, как мы видели, правило  $\Phi_5$  позволяет находить точки пересечения прямой с окружностью, и как увидим далее, точки пересечения двух окружностей также могут быть найдены.

*Постулат 6. Точка всегда может быть отмечена на чертеже произвольно, или произвольно на заданной прямой, или однозначно в месте пересечения двух прямых.*

С точностью до сделанной выше оговорки «прямая—линия», этот постулат также вполне соответствует геометрии циркуля и линейки.

*Постулат 7. Все возможности совмещения объектов чертежа при построении прямой-складки описываются правилами Фудзиты  $\Phi_1 \dots \Phi_6$ .*

Мы уже говорили, что всего правил Фудзиты семь, но последнее из них полезно исключительно в практическом смысле, так как легко выражается через первые пять. Для теоретических рассуждений оно нам не понадобится.

*Постулат 8. Когда чертёж находится в сложенном состоянии, любая точка на любой его половине может быть скопирована в совмещённую с ней позицию другой половины.*

Этот постулат очень важен, так как определяет вторую возможную операцию над чертежом (наряду с его складыванием согласно третьему постулату). Проще всего можно представить это действие, как прокол иглой сложенного вдвое чертежа — мы уже пользовались этим сравнением. Очевидно, таким образом может быть скопировано произвольное количество точек за один раз.

Нам понадобится обозначение для этой операции. Вернёмся, например, к шестому правилу Фудзиты и рисунку 2.4.

Складка с строилась так, чтобы после сгибания чертежа точка  $A$  занимала позицию  $A' \in a$  и в то же время точка  $B$  оказывалась на позиции  $B' \in b$ . Мы будем обозначать это следующим образом:

$$\Phi_6(A \leftrightarrow a \ \& \ B \leftrightarrow b) \rightarrow c \quad \& \quad A \rightarrow A' \quad \& \quad B \rightarrow B'.$$

Вполне возможно при этом, что складка  $c$  как таковая в дальнейшем не потребуется, а действие выполняется исключительно ради точек  $A', B'$ . В таком случае можно использовать более короткую запись:

$$\Phi_6(A \leftrightarrow a \ \& \ B \leftrightarrow b) \quad \& \quad A \rightarrow A' \quad \& \quad B \rightarrow B'.$$

(Местонахождение точек  $A'$  и  $B'$  на соответствующих прямых при этом автоматически подразумевается используемым правилом.)

**Постулат 9.** *На чертеже всегда доступны две точки, расстояние между которыми равно единице измерения.*

В классических ЦЛ-построениях нетрудно постулировать возможность установки циркуля в единичный раствор, однако в случае с оригами отсутствие внешних инструментов исключает такую уловку. Приходится поэтому полагать, что отрезок единичной длины изначально имеется где-то на чертеже.

Такое допущение имеет далеко идущие последствия, естественным образом оправдывая возможность вводить на чертеже декартовы координаты и пользоваться ими.

Действительно, пусть имеются точки  $Z'$  и  $Z''$ , такие что  $Z'Z'' = 1$ . Построим проходящую через них прямую:

$$\Phi_1(Z' \ \& \ Z'') \rightarrow v.$$

Эту прямую можно объявить одной из координатных осей, а любую из двух точек (пусть, например,  $Z'$ ) — началом координат. Вторая точка (соответственно,  $Z''$ ), задавая масштаб, одновременно с ним может указывать и положительное направление оси. Другая координатная ось расположена перпендикулярно первой

$$\Phi_4(v \leftrightarrow v \mid Z') \rightarrow w,$$

а её положительное направление можно выбирать по произвольно принятому принципу — например, по традиционному для декартовых координат правилу правого винта.

Это рассуждение, в свою очередь, является «оправданием» возможности работы с отрицательными числами посредством специальных приёмов и соглашений, чего в геометрии циркуля и линейки обычно не делается<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Коль скоро «раствор циркуля всегда может быть установлен в единицу», никто не мешает провести аналогичные рассуждения для системы ЦЛ, однако это бы неверным *идеологически*. Эллинистическая математика, который мы обязаны расцветом «геометрии циркуля и линейки», не знала ни координатного метода, ни отрицательных чисел — тогда как оригами получило статус формальной геометрической системы в XX веке, когда всё это было уже давно известно.

## Упражнения к главе 3

Отсюда и далее подразумевается, что все построения должны быть найдены в системе ОПФ и записаны во введённых обозначениях.

**Упражнение 14.** *Запишите формально действия (1), (2), (3), выполняемые в начале складывания бумажного самолётика (рис. 2.1).*

**Упражнение 15.** *Постройте угол величиной  $45^\circ$ , имеющий вершину в заданной точке  $A$ .*

**Упражнение 16.** *На чертеже даны три точки  $A, B, C$ , являющиеся вершинами треугольника. Найдите точки  $D, E$ , которые для этого треугольника являются центрами вписанной и описанной окружностей.*

**Упражнение 17.** *На чертеже дан ромб, заданный своими угловыми точками  $A, B, C, D$ . Найдите точки  $E, F, G, H$ , в которых этого ромба касается вписанная в него окружность.*

**Упражнение 18.** *На чертеже даны четыре точки  $A, B, C, D$ , причём  $AB = CD$ . Постройте прямую  $a$ , являющуюся внешней ( $a \cdots \{A, C\}$ ) касательной к окружностям  $\hat{A}B$  и  $\hat{C}D$ .*

**Упражнение 19.** *Объясните, как из восьмого постулата следует возможность копирования нескольких точек за одно сгибание.*

**Упражнение 20.** *Объясните, почему можно считать, что операция «отметить точку на чертеже» не требует внешних инструментов.*

# Глава 4

## Важнейшие построения

Имеются некоторые построения, которые особенно активно используются для решения более сложных задач — например, в геометрии циркуля и линейки это построение перпендикуляра и параллели, деление угла и отрезка пополам (дихотомия), и т.п. Проводя аналогию с программированием, можно говорить, что они выполняют роль «макросов», единожды определённых и упрощающих дальнейшую работу.

Подобные «макросы» можно выделить и в оригами, хотя их набор должен существенно отличаться — уже хотя бы потому, что построение перпендикуляров и дихотомия здесь выполняются элементарно, на уровне аксиоматичных правил Фудзиты. Немного сложнее и построение параллели, сводящееся к двукратному построению перпендикуляра.

Зато элементарная для ЦЛ задача «отложить на прямой длину заданного отрезка» становится не столь очевидной, и мы начнём именно с неё.

### § 4.1. Перенос отрезков и углов

Циркуль позволяет естественным образом измерять расстояния по чертежу и затем использовать их в других местах — просто-напросто делая засечки из нужной точки. В оригами это можно проделать следующим образом.

*Задача 1. Дана точка  $A$  и проходящая через неё прямая  $a \ni A$ . Даны точки  $B, C$ . Построить такую точку  $D \in a$ , что  $AD = BC$ .*

Ключ к её непосредственному решению даёт теорема 1, согласно которой длины отрезков сохраняются при их симметричном отображении. Прделаем следующую последовательность действий:

$$\begin{cases} 1 : \Phi_2(A \leftrightarrow B) & \& C \rightarrow C' \\ 2 : \Phi_5(C' \leftrightarrow a | A) & \& C' \rightarrow D \end{cases} \quad (4.1)$$

Первая складка в (4.1) строит для отрезка  $BC$  симметричный образ  $AC'$ , для которого  $AC' = BC$ . Вторая складка строит уже для него симметричный образ  $AD$ , для которого  $AD = AC'$ . Из этих двух равенств заключаем, что  $AD = BC$  (см. рис. 4.1).

Следует обратить внимание, что второй шаг построения (4.1) неоднозначен. Прямая, проходящая через центр окружности, пересекает эту окружность в *двух* точках, так что точка D может быть построена двумя способами. При необходимости её положение нужно контролировать и указывать особо.

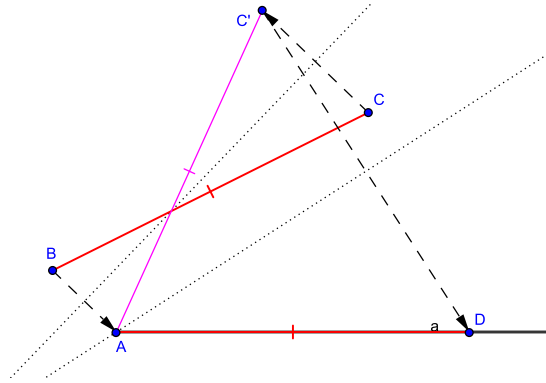


Рис. 4.1: откладывание отрезка на прямую.

Если отрезок BC является одной из сторон треугольника, то в построение (4.1) можно добавить копирование третьей его вершины, и тогда будет создана *копия треугольника, у которого одна из сторон расположена на заданной прямой, а одна из вершин совпадает с точкой на этой прямой*. Такая операция изображена на рис. 4.2.

Из равенства треугольников по трём сторонам следует и равенство их соответствующих углов, так что наряду с копированием отрезка становится возможным и копирование угла. Так, на рис. 4.2 имеет место  $\angle E''AD'' = \angle ECD$ .

Наконец, перенос двух отрезков на прямую с совпадением одной граничной точки позволяет находить сумму и разность (в зависимости от положения других граничных точек) их длин. Аналогично может быть найдена сумма или разность углов — для этого необходимо перенести их к общей вершине с одной общей стороной.

В дальнейшем мы уже не будем всякий раз ссылаться на построение (4.1), ограничиваясь простыми указаниями на соблюдение требуемого расстояния вдоль прямой.

## § 4.2. Равносторонний треугольник

Равносторонний треугольник ценен тем, что при лёгкости своего построения даёт сразу несколько полезных углов:  $60^\circ$  (любой внутренний угол),  $30^\circ$  (половина внутреннего угла или его дополнение до прямого),  $120^\circ$  (дополнение внутреннего угла до развёрнутого).

**Задача 2.** *Даны различные точки A, B. Построить третью точку C такую, что  $AB = BC = AC$ .*



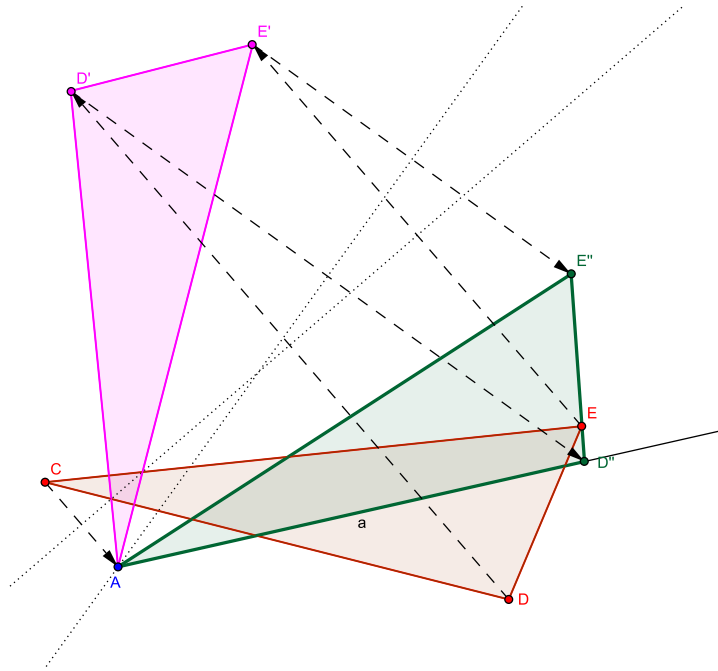


Рис. 4.2: копирование треугольника/угла.

Для этого построения мы воспользуемся тем фактом, что у равностороннего треугольника любая из вершин лежит на серединном перпендикуляре к противоположной стороне, а такой перпендикуляр, как мы помним, легко строится правилом  $\Phi_2$ .

Необходимо выполнить следующие действия (см. рис. 4.3):

$$\begin{cases} 1 : \Phi_2(A \leftrightarrow B) \rightarrow a \\ 2 : \Phi_5(B \leftrightarrow a | A) \quad \& \quad B \rightarrow C \end{cases} \quad (4.2)$$

Как видно, все перечисленные углы уже присутствуют на этом рисунке (найдите их).

### § 4.3. Квадрат

Традиционное оригами чаще всего выполняется на квадратном листе бумаги, и как мы увидим позднее, такая «область определения» приводит к нескольким довольно любопытным построениям.

Рассмотрим, как можно построить квадрат на заданном отрезке. Для этого проще всего воспользоваться тем фактом, что квадрат симметричен относительно своих диагоналей, являющихся одновременно биссектрисами его углов (см. рис. 4.4).

**Задача 3.** *Даны различные точки A, B. Построить такие точки C, D, чтобы четырёхугольник ABCD был квадратом:  $AB = BC = CD = AD$ .*

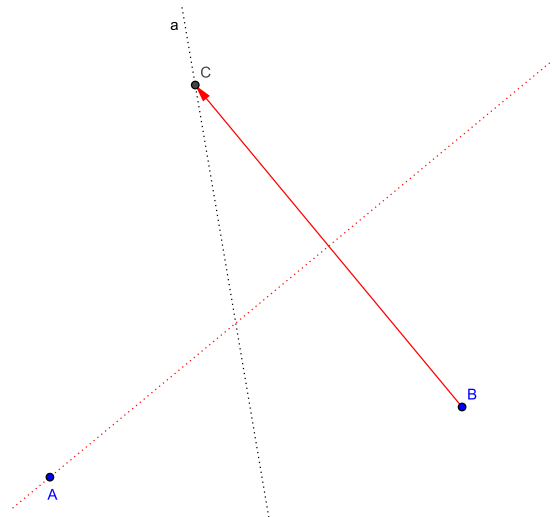


Рис. 4.3: равносторонний треугольник.

Последовательность действий для построения квадрата такова:

$$\left[ \begin{array}{l} 1 : \Phi_1(A \& B) \rightarrow a \\ 2 : \Phi_4(a \leftrightarrow a \mid A) \rightarrow b \\ 3 : \Phi_3(a \leftrightarrow b) \quad \& \quad B \rightarrow D \\ 4 : \Phi_1(B \& D) \quad \& \quad A \rightarrow C \end{array} \right. \quad (4.3)$$

При необходимости её можно дополнить складками через пары точек  $B, C$  и  $C, D$  для завершения контура квадрата.

Складка, выполняемая в (4.3) на шаге 3, как мы помним, не единственна — однако требуемый квадрат будет построен в любом случае. Две существующие складки соответствуют двум возможным (симметричным) размещениям квадрата относительно прямой  $a$ .

## § 4.4. Построение четвёртой пропорциональной

В заголовок этого параграфа вынесен немного старомодный термин, которым обозначается нахождение числа, вместе с тремя заданными числами образующего двойную пропорцию:

*Задача 4. Дана тройка чисел  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , представленных длинами отрезков. Найти число  $\delta$ , удовлетворяющее соотношению*

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta}. \quad (4.4)$$

Решение этой задачи требует некоторых подготовительных действий. Отметим на чертеже произвольную точку  $O$  и построим через неё произвольную складку. В

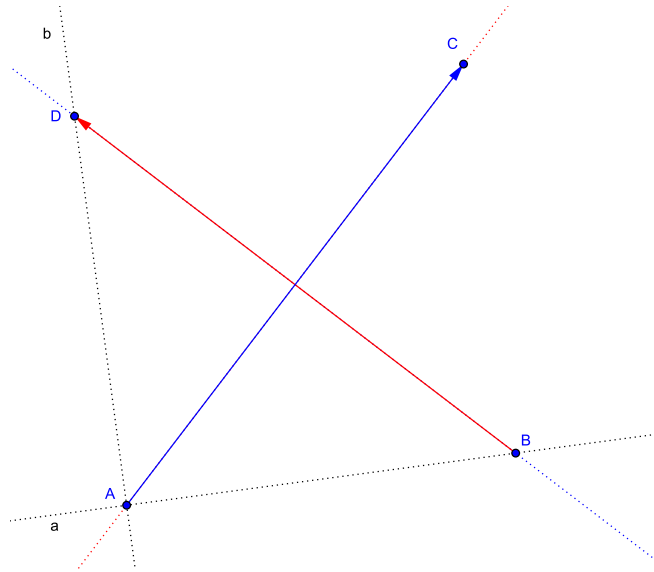


Рис. 4.4: квадрат.

разные стороны относительно  $O$  отложим отрезки  $OA = \alpha$  и  $OB = \beta$ . Далее при помощи  $\Phi_4$  построим перпендикуляр  $a$  к  $AB$  через  $O$  и на нём отложим  $OD = \gamma$  (см. рис. 4.5).

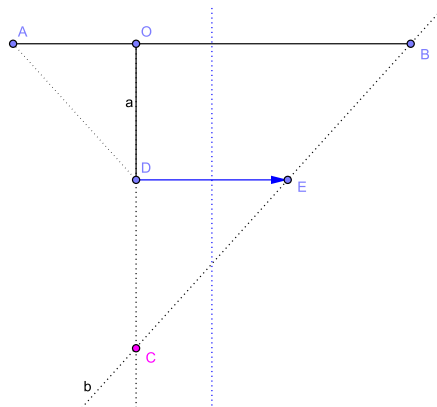


Рис. 4.5: построение четвёртой пропорциональной.

Прделаем теперь следующее:

$$\begin{cases} 1 : \Phi_1(A \& B) \quad \& \quad D \rightarrow E \\ 2 : \Phi_1(B \& E) \rightarrow b \\ 3 : a \times b \rightarrow C \end{cases} \quad (4.5)$$

Рассмотрим треугольники  $\triangle AOD$  и  $\triangle BOC$ . Они прямоугольные, так как  $a \perp AB$ . У них совпадает острый угол, так как, согласно теореме 1,  $\angle DAO = \angle OBE$ .

Значит, они подобны и для них имеет место

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB}.$$

Сопоставляя это с (4.4), видим, что  $OC = \delta$ .

Решение задачи 4 очень важно, так как позволяет выполнять умножение и деление чисел. Действительно, если применить его к тройке  $(\alpha, 1, \gamma)$ , то из (4.4) следует, что  $\delta = \gamma/\alpha$ . Аналогично, тройка  $(1, \beta, \gamma)$  даёт произведение  $\delta = \beta\gamma$ .

Все рассуждения этого параграфа были проведены так, будто числа  $\alpha, \beta, \gamma$  являются *положительными*. Однако можно работать с их модулями и учитывать знак результата по очень простому правилу: если знаки  $\alpha$  и  $\gamma$  совпадают, то знак  $\delta$  также должен совпасть со знаком  $\beta$ , а иначе эти знаки должны быть противоположными.

## § 4.5. Инверсия точки относительно окружности

В § 1.2 мы ввели понятие инверсии (см. определение 2) и описали способ геометрического построения инверсной точки. Этот способ без каких-либо проблем (и практически без изменений!) может быть реализован средствами оригами.

*Задача 5. Даны различные точки  $O, R, A$ . Построить точку  $B$ , являющуюся инверсией  $A$  относительно окружности  $\dot{O}R$ .*

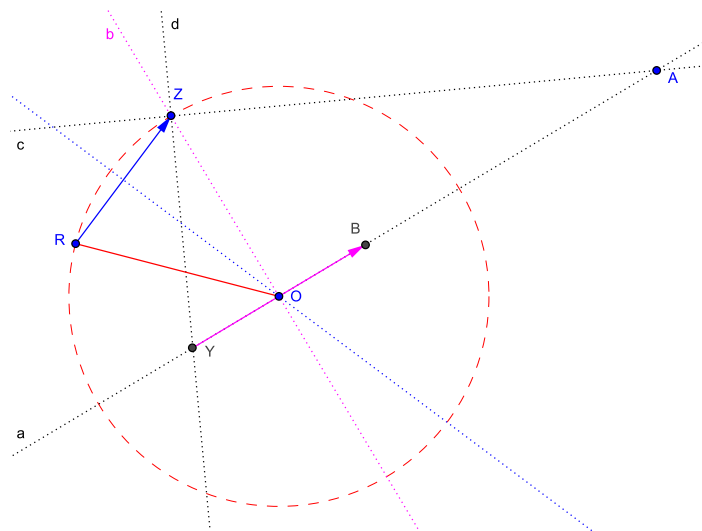


Рис. 4.6: инверсия точки относительно окружности.

Построение изображено на рис. 4.6 и заключается в следующем:

$$\left[ \begin{array}{l}
 1 : \Phi_1(O \& A) \rightarrow a \\
 2 : \Phi_4(a \leftrightarrow a \mid O) \rightarrow b \\
 3 : \Phi_5(R \leftrightarrow b \mid O) \ \& \ R \rightarrow Z \\
 4 : \Phi_1(A \& Z) \rightarrow c \\
 5 : \Phi_4(c \leftrightarrow c \mid Z) \rightarrow d \\
 6 : d \times a \rightarrow Y \\
 7 : \Phi_4(b) \ \& \ Y \rightarrow B
 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

## § 4.6. Построение угла по его косинусу

Говоря о правильных многоугольниках в § 1.3, мы упомянули, что по заданному косинусу нетрудно построить соответствующий угол. Рассмотрим, как это делается средствами оригами.

**Задача 6.** По числу  $\mu$ , заданному длиной отрезка, построить такой угол  $\phi$ , что  $\cos \phi = \mu$ .

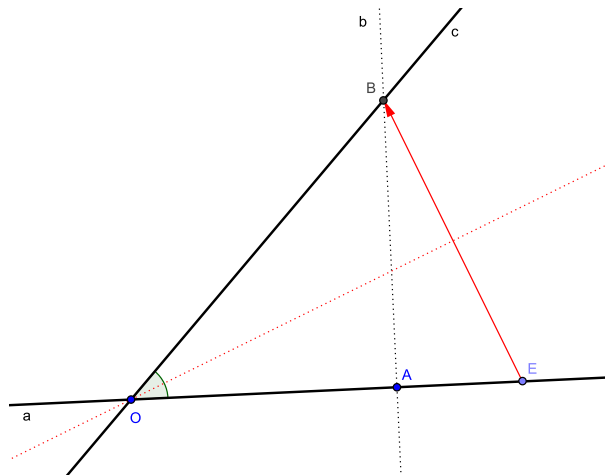


Рис. 4.7: оригами-построение угла по его косинусу.

Построение изображено на рис. 4.7. Оно основано непосредственно на определении косинуса как отношения прилежащего катета к гипотенузе и записывается следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{l}
 1 : \forall O \ \& \ \forall a \ni O \\
 2 : A \in a : \quad OA = x \\
 3 : E \in a : \quad OE = 1 \\
 4 : \Phi_4(a \leftrightarrow a \mid A) \rightarrow b \\
 5 : \Phi_5(E \leftrightarrow b \mid O) \ \& \ E \rightarrow B \\
 6 : \Phi_1(O \& B) \rightarrow c
 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Угол  $\angle AOB$  между прямыми  $a, c$  является искомым.

## Вывод по главе 4

Из результатов § 4.1 и § 4.4 следует важная теорема:

**Теорема 4.** *Методами оригами над числами, представленными длинами отрезков, могут быть выполнены любые арифметические действия.*

Сюда же может быть отнесено нахождение целых степеней, сводящееся к последовательному умножению числа на себя и, возможно, нахождению обратной величины.

## Упражнения к главе 4

**Упражнение 21.** *Дана прямая  $a$  и точка  $A \notin a$ . Постройте прямую  $b \ni A$  такую, что  $a \parallel b$ .*

**Упражнение 22** (ослабленный вариант задачи 1). *Дана прямая  $a$  и точки  $A, B \notin a$ . Постройте точки  $C, D \in a$  такие, что  $CD = AB$ .*

**Упражнение 23.** *Запишите формально действия, изображённые на рис. 4.2.*

**Упражнение 24.** *Даны три различные точки  $A, B, C$ . Постройте равнобедренный треугольник, у которого длина основания совпадает с длиной отрезка  $AB$ , а длины боковых сторон — с длиной отрезка  $BC$ .*

**Упражнение 25.** *Решите задачу 3, не пользуясь третьим правилом Фудзиты  $\Phi_3$ .*

**Упражнение 26.** *Запишите формально подготовительный этап (построение отрезков с длинами  $\alpha, \beta, \gamma$  и нужным взаимным размещением) решения задачи 4.*

**Упражнение 27.** *Найдите альтернативный метод построения инверсной точки на основе § 4.4.*

**Упражнение 28.** *Две данные прямые  $a, b$  пересекаются под углом, отличным от прямого. Построить отрезки, длины которых равны синусу и косинусу острого угла между прямыми.*

## Глава 5

### Задача о делении отрезка

Комбинация двух первых правил Фудзиты позволяет легко делить отрезок пополам: как мы помним,  $\Phi_1$  строит прямую между двумя точками, а  $\Phi_2$  — серединный перпендикуляр между ними же. Пересечение этих двух прямых даёт искомую среднюю точку отрезка.

**Задача 7.** *Даны две различные точки  $A, B$ . Построить точку  $C \in AB$  такую, что  $AC = BC$ .*

Записывая указанную выше комбинацию, получаем

$$\begin{cases} 1 : \Phi_1(A \& B) \rightarrow a \\ 2 : \Phi_2(A \leftrightarrow B) \rightarrow b \\ 3 : a \times b \rightarrow C \end{cases} \quad (5.1)$$

Многократным повторением (5.1) можно найти  $\frac{1}{2^n}$ -ю часть отрезка и тем самым разделить его в любом соотношении  $n : m$ , если только  $\frac{n}{m}$  является *конечной* двоичной дробью — см. [1], раздел «Binary Divisions». При этом, конечно, шаг 1 достаточно выполнить лишь единожды.

В следующих параграфах мы рассмотрим *произвольные* случаи деления отрезка и два метода, один из которых адаптирован из классической геометрии, а другой характерен именно для традиционного оригами. Кроме того, определённый интерес представляет знаменитая задача о «золотом сечении» — имеющая, кстати сказать, самое непосредственное отношение к бумаге и её складыванию.

#### § 5.1. Оригами-версия метода Дюрера

Существует простой и удобный метод деления отрезка в заданном соотношении  $n : m$ , традиционно приписываемый (почти наверняка ошибочно) великому немецкому художнику Альбрехту Дюреру. Для циркуля и линейки он изложен в [8] под № 10.

**Задача 8.** *Даны две различные точки  $A_0, B_0$  и два взаимно простых<sup>1</sup> натуральных числа  $n, m \in \mathbb{N}$ . Построить такую точку  $C \in A_0B_0$ , что  $A_0C : B_0C = n : m$ .*

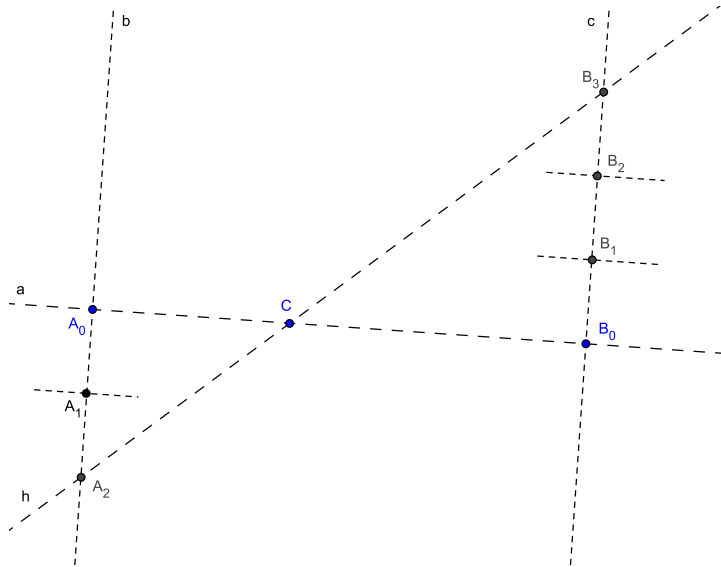


Рис. 5.1: метод Дюрера для пропорции 2 : 3.

Идею нетрудно адаптировать для оригами. Соответствующий алгоритм показан на рис. 5.1 (изображён случай  $n = 2$ ,  $m = 3$ ) и описывается следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{l}
 1 : \Phi_1(A_0 \& B_0) \rightarrow a \\
 2 : \Phi_4(a \leftrightarrow a \mid A_0) \rightarrow b \\
 3 : \Phi_4(a \leftrightarrow a \mid B_0) \rightarrow c \\
 4 : A_1 \in b : A_0A_1 = 1 \\
 5 : B_1 \in c : B_0B_1 = 1 \quad \& \quad A_1 \dots a \dots B_1 \\
 6 : \langle \Phi_4(b \leftrightarrow b \mid A_k) \quad \& \quad A_{k-1} \rightarrow A_{k+1} \rangle, \quad k = 1 \dots (n-1) \\
 7 : \langle \Phi_4(c \leftrightarrow c \mid B_k) \quad \& \quad B_{k-1} \rightarrow B_{k+1} \rangle, \quad k = 1 \dots (m-1) \\
 8 : \Phi_1(A_n \& B_m) \rightarrow h \\
 9 : a \times h \rightarrow C
 \end{array} \right. \quad (5.2)$$

(Здесь для шагов 6 и 7 использовано обозначение, говорящее о том, что взятое в угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  необходимо повторять, последовательно увеличивая  $k$  от 1 до указанного числа  $n - 1$  или  $m - 1$ . В программировании аналогом такого обозначения является цикл по  $k$ .)

Чтобы обосновать правильность построения (5.2), достаточно заметить, что  $A_0A_n = n$  и  $B_0B_m = m$ , а прямоугольные треугольники  $\triangle A_nA_0C$  и  $\triangle B_mB_0C$  подобны по общему острому углу:  $\angle A_nCA_0 = \angle B_mB_0C$ . Отсюда следует требуемая пропорция

$$\frac{A_0C}{B_0C} = \frac{A_0A_n}{B_0B_m} = \frac{n}{m}.$$

<sup>1</sup>В принципе это даже не обязательно. Если числа не являются взаимно простыми, то их всегда можно предварительно сократить на наибольший общий делитель. Хотя вполне можно обходиться и без этого, несколько увеличивая себе объём работы.



Этот метод можно применять и для случая, когда нужно разделить отрезок в соотношении  $x : y$ , где числа  $x$  и  $y$  являются произвольными (не обязательно натуральными) и заданы длинами отрезков.

## § 5.2. Индуктивное деление методом Хаги

Оригамист Казуо Хага<sup>2</sup> в своё время изучил специфическое складывание квадрата — такое, при котором его угол совмещается с противоположной стороной в произвольной её позиции. Эти результаты подробнейшим образом изложены в его книге [7] и гораздо менее подробно в статье Лэнга [1]. Одним из них мы воспользуемся для построения оригинального метода деления отрезка в традиционном стиле оригами.

В несколько упрощённом виде одна из теорем Хаги выглядит следующим образом:

**Теорема 5 (К. Хага).** Пусть квадрат  $ABCD$  имеет сторону  $x$ . Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, если складка совмещает угол  $A$  с противоположной стороной  $BC$ , отсекая на ней отрезок  $A'B = \frac{x}{n}$ , то пересечение сторон  $A'D'$  и  $CD$  отсекает от последней отрезок  $CF = \frac{2x}{n+1}$  (см. рис. 5.2).

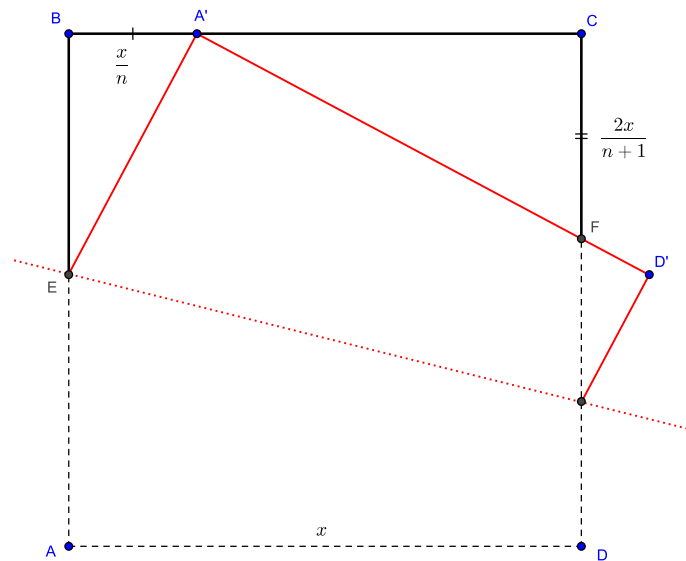


Рис. 5.2: к теореме Хаги.

Для доказательства теоремы положим  $BE = z$ , тогда  $A'E = x - z$ . По теореме Пифагора,  $A'B^2 = A'E^2 - BE^2$ , т.е.

$$\frac{x^2}{n^2} = (x - z)^2 - z^2 \Rightarrow \frac{x^2}{n^2} = x^2 - 2xz \Rightarrow z = \frac{x(n^2 - 1)}{2n^2}.$$

<sup>2</sup>Для разнообразия — биолог, а не математик или физик.

Далее, угол  $\angle EA'D'$ , как симметричный образ угла квадрата  $\angle EAD$  является прямым по теореме 1. Отсюда следует равенство углов  $\angle FA'C = \angle BEA'$ , так что прямоугольные треугольники  $\triangle EBA'$  и  $\triangle A'CF$  оказываются подобными по острому углу. Для них имеет место пропорция

$$\frac{CF}{A'C} = \frac{A'B}{BE} \Rightarrow CF = \frac{A'C \cdot A'B}{BE}.$$

Подставляя вместо  $BE$  найденное  $z$  и учитывая, что  $A'C = x - \frac{x}{n}$ , получаем

$$CF = \frac{2n^2}{x(n^2 - 1)} \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x(n-1)}{n} = \frac{2x}{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Итак, пусть имеется отрезок, который нужно разделить на  $n$  равных частей — или, что то же самое, найти его  $\frac{1}{n}$ -ю часть.

Мы знаем, что с помощью (5.1) можно разделить отрезок пополам, а с помощью (4.3) можно построить на этом отрезке квадрат. Тогда, положив в теореме Хаги  $n = 2$  и  $A'B = \frac{x}{2}$ , найдём  $CF = \frac{2x}{3}$ . Деление пополам  $CF$  даст нам треть длины отрезка.

Четверть длины отрезка можно найти двукратным применением (5.1). С другой стороны, если в теореме Хаги  $A'B = \frac{x}{3}$ , то  $CF = \frac{2x}{4}$ , и  $CF/2 = \frac{x}{4}$ .

Далее действуем аналогично: если  $A'B = \frac{x}{k}$ , то  $CF = \frac{2x}{k+2}$ , и  $CF/2 = \frac{x}{k+1}$ . Повторяя этот процесс нужное число раз, можно найти  $\frac{x}{n}$ .

Подобное деление можно назвать *индуктивным*: если мы умеем делить отрезок пополам и от  $\frac{x}{k}$  переходить к  $\frac{x}{k+1}$ , то длина  $\frac{x}{n}$  может быть найдена для любого  $n$ .

## § 5.3. Золотое сечение

Международный стандарт ISO 216 требует от бумажных листов следующего свойства: будучи разрезанным или сложенным вдоль короткой стороны, прямоугольный лист должен давать меньший прямоугольник с тем же соотношением сторон, что исходный.

Таким образом, лист бумаги формата А4, который каждый держал в руках, является наглядным ответом к следующей геометрической задаче: построить прямоугольник, у которого бо́льшая сторона относится к меньшей так же, как меньшая относится к половине большей.

С давних времён известна похожая задача, формулируемая обычно для отрезка:

**Задача 9.** Даны две различные точки  $A, B$ . Построить такую точку  $C \in AB$ , для которой выполнялось бы соотношение

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC}. \quad (5.3)$$



Наконец,  $BC = BX$ , откуда окончательно получаем

$$BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad AC = AB - BC = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

откуда и следует (5.4).

## Упражнения к главе 5

**Упражнение 29.** *Измените (5.2) так, чтобы деление отрезка  $AB$  осуществлялось точкой  $C$  в соотношении  $x : y$ , где числа  $x$  и  $y$  заданы длинами отрезков  $PQ$  и  $RS$ .*

**Упражнение 30.** *Запишите формально индуктивное деление отрезка по методу Хаги. Можно ли в теореме Хаги заменить натуральное  $n$  на произвольное вещественное число  $\mu > 1$ ?*

**Упражнение 31.** *Выразите длины всех отрезков на рис. 5.2 через  $x$  и  $n$ .*

**Упражнение 32.** *Докажите, что константа золотого сечения (5.4) и обратное к ней число имеют совпадающие дробные части.*

## Авторское отступление

Будучи в середине 1980-х годов школьником, я где-то (определённо не на уроке!) услышал тезис о том, что циркуль и линейка позволяют геометрически решать квадратные уравнения.

«Лучшая в мире» советская школа не смогла удовлетворить мой интерес к этому тезису. В библиотеке мне помогли найти статью [10], название которой идеально соответствовало моему запросу. Библиотекари не смогли бы сделать большего, но... эта статья также не удовлетворила мой интерес.

Я счёл её совершенно не соответствующей заявленному названию: автор пользовался координатным методом и отрицательными числами, которые в моём представлении категорически не вязались с циркулем и линейкой. Кончилось тем, что я нашёл нужные построения самостоятельно.

Много позже я познакомился с первоисточниками — трактатами Эвклида, Архимеда, Хайяма, аль-Хорезми, — которые дали окончательные ответы на мои вопросы. Результаты всех этих «изысканий» я кратко описал в [8, § 5.3]

Однако когда я ещё позже познакомился с концепцией ОПФ, центральная идея статьи [10] прекрасно к ней подошла! Все необходимые «моральные оправдания» я уже привёл в комментариях к девятому постулату на стр. 27. Описанный в следующей главе (§ 6.1) общий метод решения квадратных уравнений опирается именно на эту статью.

**Упражнение 33.** *Найдите и формально запишите оригами-версии построений 20–22 из [8].*

# Глава 6

## Оригами и алгебра

Решение уравнения первой степени

$$\alpha x + \beta = 0,$$

как известно, выражается формулой

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Мы знаем уже, что построение (4.4) позволяет найти частное двух чисел, а учёт знака без особого труда производится «в уме» (см. там же), так что система ОПФ позволяет решать линейные уравнения.

В этой главе мы рассмотрим вопрос о решении уравнений более высоких степеней и нахождении соответствующих корней.

### § 6.1. Квадратное уравнение

Будем рассматривать приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + \beta x + \gamma = 0, \tag{6.1}$$

в котором коэффициенты могут иметь произвольные знаки. Несложными алгебраическими преобразованиями его можно свести к системе

$$\begin{cases} \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\gamma + 1}{2}\right)^2 = \frac{\beta^2}{4} + \frac{(\gamma - 1)^2}{4} \\ y = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Первое уравнение этой системы задаёт на координатной плоскости окружность, второе — прямую. Как мы знаем, правило  $\Phi_5$  позволяет находить пересечения окружностей и прямых, а следовательно, система (6.2) может быть решена.

Центром окружности, очевидно, является точка

$$C\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{\gamma + 1}{2}\right).$$

Вместо выражения радиуса из первого уравнения системы нам будет удобнее найти точку на этой окружности. Для этого представим правую часть в виде

$$\frac{\beta^2}{4} + \frac{(\gamma - 1)^2}{4} = \left(-\frac{\beta}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\gamma + 1}{2} - 1\right)^2.$$

Как видно, это квадрат расстояния между точкой  $C$  и точкой  $O'(0, 1)$ .

Итак, решить уравнение (6.1) можно следующим образом:

1. Построить окружность с центром в точке  $C$ , проходящую через точку  $(0, 1)$ ;
2. Абсциссы точек пересечения этой окружности с прямой  $y = 0$  являются корнями уравнения.

При этом необходимо с помощью особых соображений учитывать знаки — как для коэффициентов уравнения, так и для его корней. Кроме того, возможно, что окружность и прямая не будут иметь общих точек — очевидно, это означает отсутствие вещественных решений.

Построение показано на рис. 6.1 и требует некоторых предварительных действий (фактически сводящихся к введению на чертеже координатной системы).

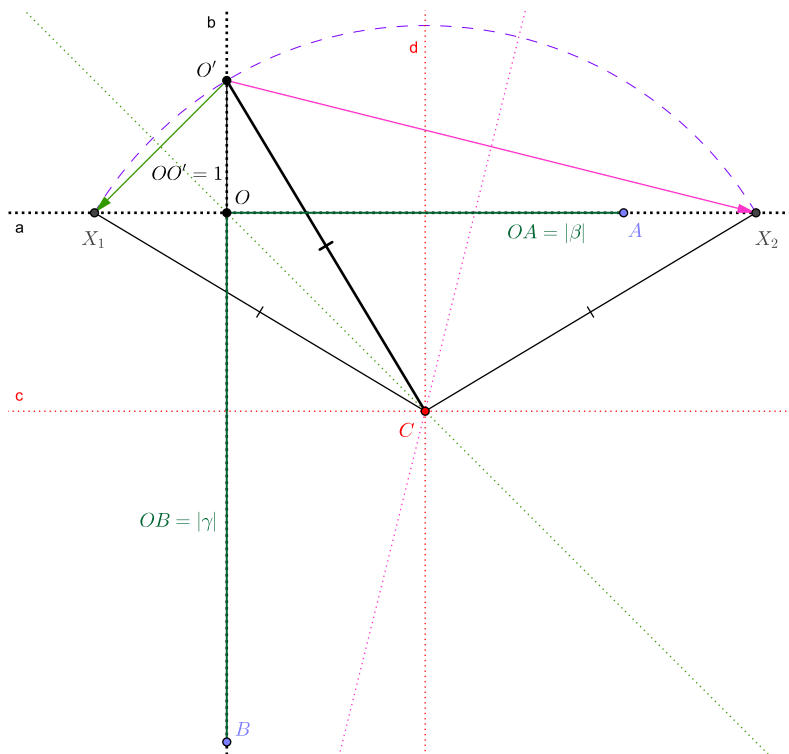


Рис. 6.1: к решению уравнения (6.1).

Отметим на чертеже произвольную точку  $O$  и построим через неё две взаимно перпендикулярные складки  $a, b$ . На одной из них (пусть это будет  $a$ ) отложим отрезок  $OA = |\beta|$ , на другой (соответственно,  $b$ ) — отрезок  $OO' = 1$ .

Теперь на  $b$  отложим отрезок  $OB = |\gamma|$ , причём сделаем это следующим образом: если  $\gamma > 0$ , то точки  $O'$  и  $B$  должны лежать *по одну сторону* относительно  $O$ , если же  $\gamma < 0$ , то *по разные стороны*.

Далее выполним следующие действия:

$$\left[ \begin{array}{l} 1 : \Phi_2(O' \leftrightarrow B) \rightarrow c \\ 2 : \Phi_2(O' \leftrightarrow A) \rightarrow d \\ 3 : c \times d \rightarrow C \\ 4 : \Phi_5(O' \leftrightarrow a | C) \quad \& \quad O' \rightarrow \{X_1, X_2\} \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Длины отрезков  $OX_i$  являются абсолютными значениями корней уравнения (6.1), а знаки для них учитываются по следующему правилу: если точки  $X_i$  и  $A$  лежат *по одну сторону* относительно  $O$ , то знак при расстоянии  $OX_i$  берётся *противоположным* знаку  $\beta$ ; если же они лежат *по разные стороны* от  $O$ , то знак должен *совпадать* со знаком  $\beta$ .

Построением (6.3) полностью и в общем виде решается...

**Задача 10.** Найти корни приведённого квадратного уравнения  $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , коэффициенты которого заданы длинами отрезков.

Положив в (6.1)  $\beta = 0$  и взяв  $\gamma$  с отрицательным знаком, можно указанным построением найти квадратный корень  $\sqrt{\gamma}$ , однако в следующем параграфе мы опишем более общий метод.

## § 6.2. Среднее геометрическое и квадратный корень

Средним геометрическим двух положительных чисел  $\alpha, \beta$  называется такое число  $\gamma$ , квадрат которого совпадает с произведением этих двух:

$$\gamma^2 = \alpha\beta \quad \text{или} \quad \gamma = \sqrt{\alpha\beta}. \quad (6.4)$$

В частности, если положить одно из чисел равным единице, то среднее геометрическое будет равно квадратному корню из другого числа.

**Задача 11.** По двум числам  $\alpha, \beta > 0$ , заданным длинами отрезков, найти такое число  $\gamma$ , что  $\gamma^2 = \alpha\beta$ .

Решение этой задачи, проиллюстрированное на рис. 6.2, выглядит следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{l} 1 : \forall O \quad \& \quad \forall a \ni O \\ 2 : A \in a : \quad AO = \alpha \\ 3 : B \in a : \quad BO = \beta \quad \& \quad A \dots O \dots B \\ 4 : \Phi_1(A \& B) \rightarrow b \\ 5 : a \times b \rightarrow C \\ 6 : \Phi_4(a \leftrightarrow a | O) \rightarrow c \\ 7 : \Phi_5(B \leftrightarrow c | C) \quad \& \quad B \rightarrow D \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Длина отрезка  $OD$  даёт искомое число  $\gamma$ .



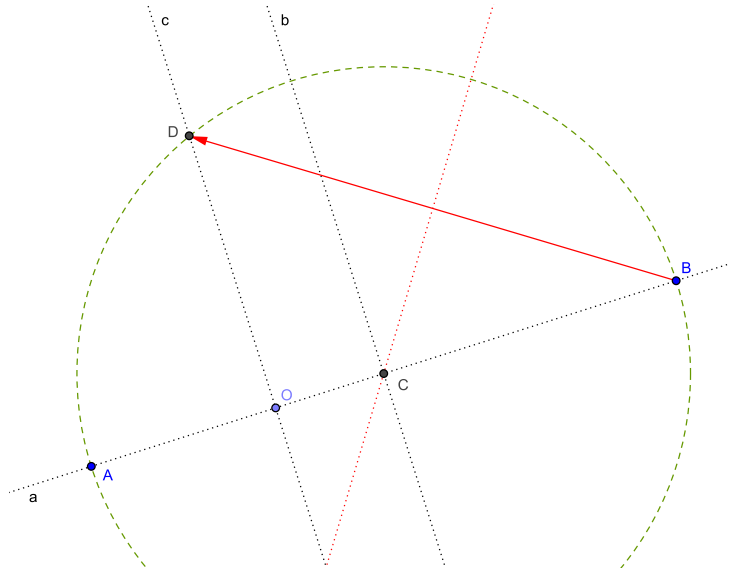


Рис. 6.2: построение среднего геометрического.

Чтобы обосновать (6.5), достаточно заметить, что точка С является центром окружности, построенной на отрезке АВ как на диаметре. Соответственно, угол  $\angle ADB$ , опирающийся на этот диаметр, по теореме Фалеса оказывается прямым.

Тогда прямоугольные треугольники  $\triangle AOD$  и  $\triangle DOB$  подобны по общему острому углу:  $\angle ADO = \angle DBO$ , и имеет место пропорция

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OD}{OA},$$

откуда  $OD^2 = OA \cdot OB = \alpha\beta$ , что и требовалось доказать.

### § 6.3. Кубическое уравнение

*Предупреждение читателю: материал данного параграфа сложен и подразумевает знакомство с такими понятиями, как производная и уравнение касательной к гладкой кривой линии. При отсутствии этого знакомства пропустите доказательство теоремы.*

**Задача 12.** Решить кубическое уравнение  $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ , коэффициенты которого заданы длинами отрезков.

Решение кубических уравнений не входит в школьную программу, однако представления о графиках функций вполне достаточно для осознания важного факта: кубическое уравнение с вещественными коэффициентами всегда имеет по меньшей мере один вещественный корень. Со всей строгостью он доказывается методами высшей алгебры, а самые элементарные пояснения можно найти в [9, гл. II, § 5].

Методы оригами, несмотря на кажущуюся примитивность, позволяют решать уравнения третьей степени. Обосновать этот факт можно разными способами; следующий метод основан на идее из эссе Хатори [2] и может быть сформулирован в виде следующей теоремы:

**Теорема 6.** Пусть прямая  $w$ , заданная уравнением

$$y = \lambda x + \mu \quad (6.6)$$

такова, что удовлетворяет двум условиям:

1. симметричный относительно  $w$  образ точки  $P(\alpha, 1)$  лежит на прямой  $p$ , заданной уравнением  $y = -1$ ;
2. симметричный относительно  $w$  образ точки  $Q(\gamma, \beta)$  лежит на прямой  $q$ , заданной уравнением  $x = -\gamma$ .

Тогда коэффициент  $\lambda$  является корнем уравнения  $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ .

Для доказательства прежде всего заметим, что такая прямая  $w$  является непосредственным результатом применения шестого правила Фудзиты:

$$\Phi_6(P \leftrightarrow p \ \& \ Q \leftrightarrow q) \rightarrow w.$$

Как мы помним из главы 2, это означает, что  $w$  одновременно касается двух парабол  $P\check{r}$  и  $Q\check{q}$ .

Директрисы этих парабол параллельны координатным осям, так что в свете результатов § 1.1 нетрудно получить их уравнения:

$$P\check{r} : 4y = (x - \alpha)^2, \quad (6.7)$$

$$Q\check{q} : 4\gamma x = (y - \beta)^2. \quad (6.8)$$

Пусть прямая  $w$  касается параболы  $P\check{r}$  в точке  $P_1(x_1, y_1)$ . Уравнение касательной тогда имеет вид

$$(x_1 - \alpha)(x - x_1) = 2(y - y_1).$$

Раскрывая в нём скобки и сопоставляя с (6.6), получаем

$$\lambda = \frac{x_1 - \alpha}{2} \quad \text{и} \quad \mu = y_1 - \frac{x_1(x_1 - \alpha)}{2}.$$

Из первого выражения  $x_1 = \alpha + 2\lambda$ . Кроме того,  $P_1 \in P\check{r}$ , а потому из (6.7) имеем  $y_1 = \frac{1}{4}(x_1 - \alpha)^2 = \lambda^2$ . Подставляя это в выражение для  $\mu$ , получаем

$$\mu = \lambda^2 - \lambda(\alpha + 2\lambda) = -\lambda\alpha - \lambda^2. \quad (6.9)$$

В отношении параболы  $Q\check{q}$  предположим сначала, что  $\gamma \neq 0$ . Пусть прямая  $w$  касается её в точке  $Q_1(x_2, y_2)$ . Уравнение касательной имеет тогда вид

$$(y_1 - \beta)(y - y_2) = 2\gamma(x - x_2).$$

Раскрывая скобки и сопоставляя с (6.6), получаем

$$\lambda = \frac{2\gamma}{y_2 - \beta} \quad \text{и} \quad \mu = y_2 - \frac{2\gamma x_2}{y_2 - \beta}.$$

Из первого выражения  $y_2 = \beta + \frac{2\gamma}{\lambda}$ . Кроме того,  $Q_1 \in Q\check{q}$ , а потому из (6.8)

$$x_2 = \frac{(y_2 - \beta)^2}{4\gamma} = \frac{\gamma}{\lambda^2}.$$

Подставляя это в выражение для  $\mu$ , получаем

$$\mu = \beta + \frac{2\gamma}{\lambda} - \lambda \cdot \frac{\gamma}{\lambda^2} = \beta + \frac{\gamma}{\lambda}. \quad (6.10)$$

Приравнивая (6.9) к (6.10) и умножая на  $\lambda$ , получаем  $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ , что и требовалось доказать.

Пусть теперь  $\gamma = 0$ . Это означает, что  $Q \in q$ , и парабола  $Q\check{q}$  вырождается в прямую  $\check{q}$ , заданную уравнением  $y = \beta$ . Точка  $Q(0, \beta)$  принадлежит как  $q$  (с уравнением  $x = 0$ ), так и  $\check{q}$ , являясь их пересечением.

Складка  $w$ , обеспечивающая совмещение  $Q \leftrightarrow q$ , при  $Q \in q$  либо перпендикулярна к прямой  $q$ , либо проходит через точку  $Q$ . В первом случае  $w$  параллельна оси абсцисс и, следовательно,  $\lambda = 0$ . Во втором случае  $\mu = \beta$  и из (6.9) вытекает равенство  $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ .

В любом из этих двух случаев,

$$\lambda(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda = 0,$$

и тем самым теорема 6 доказана полностью.

Чтобы можно было воспользоваться этим результатом практически, необходимо de-facto ввести на чертеже систему координат. Построим две перпендикулярные прямые  $a \perp b$ , пересекающиеся в точке  $O$ ; отложим на  $a$  точки  $\alpha$  и  $\pm\gamma$ ; отложим на  $b$  точки  $\pm 1$  и  $\beta$ .

После этого остаётся лишь построить прямые  $p, q$  и точки  $P, Q$ , а затем воспользоваться правилом  $\Phi_6$  для построения прямой  $w$ .

Если  $w \parallel b$ , то её угловой коэффициент равен нулю, и корнем кубического уравнения является ноль. В противном случае пересечение прямых  $a, b, w$  образует прямоугольный треугольник, и угловой коэффициент  $w$  будет равен отношению «вертикального» катета к «горизонтальному» — разумеется, с учётом знаков. Для нахождения этого отношения нужно воспользоваться построением (4.5).

Формальную запись этого метода (сравнительно длинную, но очень простую) можно оставить в качестве упражнения.

Альтернативный метод решения кубических уравнений с помощью правила  $\Phi_6$ , предложенный Робертом Геретшлегером, описан в статье [4].

## § 6.4. Кубический корень

Для нахождения кубического корня  $\sqrt[3]{\theta}$  нужно решить уравнение третьей степени  $z^3 - \theta = 0$ . В свете результатов предыдущего параграфа это не составляет труда.

Задача облегчается тем, что два коэффициента из трёх в данном случае равны нулю, и отпадает необходимость в специальном учёте знаков. Действительно, при  $\theta \in \mathbb{R}$  знаки  $\theta$  и  $\sqrt[3]{\theta}$  совпадают, так что можно без ограничения общности полагать  $\theta > 0$ .

В терминах теоремы 6 необходимо найти складку  $w$ , совмещающую точки  $P(0,1)$  и  $Q(-\theta,0)$  с прямыми  $p$  и  $q$ , заданными уравнениями  $y = -1$  и  $x = \theta$  соответственно.

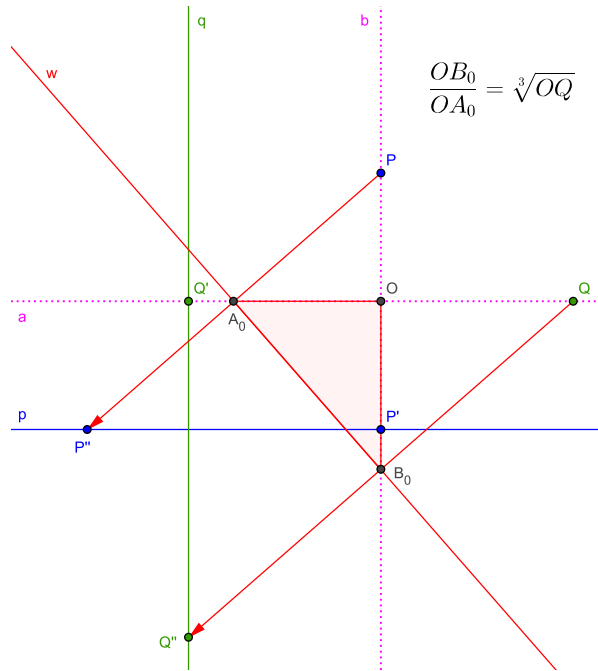


Рис. 6.3: извлечение кубического корня.

Построение изображено на рис. 6.3 и описывается следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{l}
 1 : \forall a \ \& \ \forall O \in a \\
 2 : \Phi_4(a \leftrightarrow a \mid O) \rightarrow b \\
 3 : P \in b : \quad OP = 1 \\
 4 : P' \in b : \quad OP = 1 \ \& \ P \dots O \dots P' \\
 5 : Q \in a : \quad OQ = \theta \\
 6 : Q' \in a : \quad OQ' = \theta \ \& \ Q \dots O \dots Q' \\
 7 : \Phi_4(a \leftrightarrow a \mid Q') \rightarrow q \\
 8 : \Phi_4(b \leftrightarrow b \mid P') \rightarrow p \\
 9 : \Phi_6(P \leftrightarrow p \ \& \ Q \leftrightarrow q) \rightarrow w \\
 10 : w \times a \rightarrow A_0 \\
 11 : w \times b \rightarrow B_0
 \end{array} \right. \quad (6.11)$$

После этого искомый кубический корень может быть найден с помощью (4.5), как отношение длин отрезков  $OB_0 : OA_0$ .

## § 6.5. «Флорентийские степени»

Во флорентийских трактатах XV века по архитектуре встречается описание построения, позволяющего находить целые степени числа, превосходящего единицу. Для нас это построение особенно интересно тем, что методами оригами выполняется намного проще, чем циркулем и линейкой — причина кроется в том, что основной его операцией является проведение перпендикуляра к прямой через точку. Исходная версия «флорентийских степеней» приведена в [8, № 19].

**Задача 13.** Число  $x > 1$  задано длиной отрезка. Найти его произвольную целую степень  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Идея построения заключается в следующем. Пусть дан отрезок  $OA = x$ . Необходимо прежде всего построить прямоугольный треугольник  $\triangle OA_0A_1$  с прямым углом  $A_0$ , катетом  $OA_0 = 1$  и гипотенузой  $OA_1 = x$ . Далее эти катет и гипотенуза продолжаютя прямыми  $a_0, a_1$  и к ним через точки  $A_k$  последовательно строятся перпендикуляры, отсекающие на этих прямых искомые степени числа  $x$  (см. рис. 6.4).

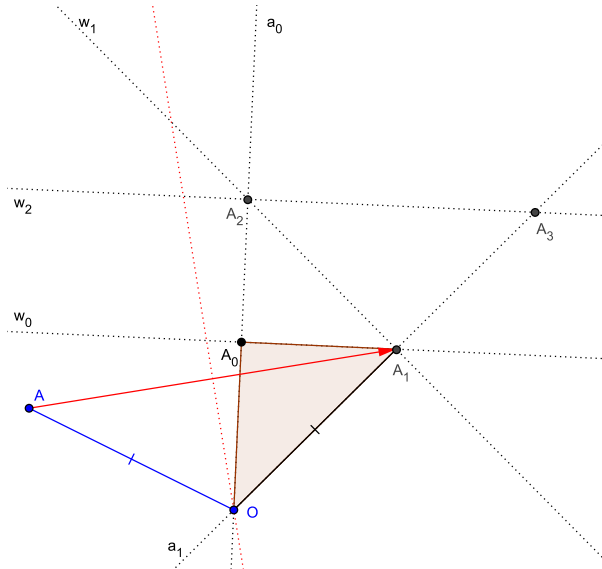


Рис. 6.4: «флорентийские степени».

Для удобства формальной записи этого построения введём специальное обозначение. Будем считать, что записи вида

$$\|n\|, \quad \|n + 1\| \quad \text{и т.п.}$$

означают остаток от целочисленного деления на двойку:

$$\|0\| = \|2\| = \|4\| = \dots = 0, \quad \|1\| = \|3\| = \dots = 1.$$

Иными словами, для чётных чисел (включая сюда и отрицательные!) результат равен нулю, а для нечётных единице.

С этими обозначениями построение компактно записывается следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{l} 1 : \forall a_0 \ni O \ \& \ A_0 \in a_0 : \ OA_0 = 1 \\ 2 : \Phi_4(a_0 \leftrightarrow a_0 \mid A_0) \rightarrow w_0 \\ 3 : \Phi_5(A \leftrightarrow w_0 \mid O) \ \& \ A \rightarrow A_1 \\ 4 : \Phi_1(O \ \& \ A_1) \rightarrow a_1 \\ 5 : \left\{ \begin{array}{l} \Phi_4(a_{\|n\|} \leftrightarrow a_{\|n\|} \mid A_n) \rightarrow w_n \\ w_n \times a_{\|n+1\|} \rightarrow A_{n+1} \end{array} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \quad (6.12)$$

В результате выполнения этих действий будет иметь место равенство  $x^n = OA_n$ , включая сюда и нулевую степень.

Справедливость построения можно обосновать с использованием подобия прямоугольных треугольников по общему острому углу. Например,

$$\frac{OA_1}{OA_0} = \frac{OA_2}{OA_1},$$

откуда следует  $(OA_1)^2 = OA_0 \cdot OA_2$  или, что то же самое,  $x^2 = OA_2$ .

Остаётся добавить, что (6.12) записано по возрастанию степеней, с удалением от точки  $O$ . Аналогичный процесс с приближением к  $O$  даст отрицательные степени числа  $x$ .

## Вывод по главе 6

Как мы увидели, методы оригами позволяют решать алгебраические уравнения до третьей степени включительно. В действительности дело обстоит даже несколько лучше, так как по способу, найденному итальянским математиком Лодовико Феррари (1522–1565) решение уравнения четвёртой степени всегда может быть сведено к решению кубических и квадратных уравнений. (Историческую справку об алгебраических уравнениях см. в приложении А.)

Кроме того, мы указали альтернативный алгоритм (6.12), позволяющий находить целые степени чисел. Таким образом, теорема 4 может быть усилена до следующей формулировки:

**Теорема 7.** *Методами оригами над числами, представленными длинами отрезков, могут быть выполнены любые арифметические действия, операции нахождения целых степеней, а также извлечения квадратных и кубических корней.*

Наконец, нужно упомянуть интересный результат, доказанный в статье [3]: если допустить, что чертёж может подвергаться  $n$ -кратному одновременно<sup>1</sup> складыванию, то такая система геометрических построений позволит непосредственно решать алгебраические уравнения степени  $(n + 2)$ .

<sup>1</sup>Третий постулат в этом случае выглядел бы примерно следующим образом: «Прямая линия строится как результат складывания чертежа. Операция складывания может быть выполнена не более  $n$  раз подряд, после чего чертёж должен быть приведён в исходное разложенное состояние».

## Упражнения к главе 6

**Упражнение 34.** Запишите формально подготовительные действия к построению (6.3). Объясните правила выбора знаков в этом построении. Какой знак имеет коэффициент  $\gamma$  на рис. 6.1?

**Упражнение 35.** Докажите построением, что среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического:

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2},$$

причём равенство здесь достигается лишь при  $\alpha = \beta$ .

**Упражнение 36.** Докажите, что кубическое уравнение с вещественными коэффициентами не может иметь два вещественных корня и один комплексный.

**Упражнение 37** (для знакомых с основами дифференциального исчисления). Выведите уравнения парабол  $P\check{r}$  и  $Q\check{q}$ , используемых в доказательстве теоремы 6, а также уравнения касательных к ним.

**Упражнение 38.** Пользуясь какой-либо системой динамической геометрии (см. приложение В), решите с помощью теоремы 6 кубическое уравнение

$$x^3 + x^2 - 4x = 4.$$

Попробуйте решить его алгебраически.

**Упражнение 39.** Запишите формально решение кубического уравнения, основанное на теореме 6, как описано в § 6.3. Опишите правила выбора знаков.

**Упражнение 40.** Как лучше всего воспользоваться построением (4.5) после выполнения (6.11), чтобы переход от одного к другому был возможно более простым?

**Упражнение 41.** Модифицируйте (6.12) для нахождения отрицательных степеней числа.

**Упражнение 42.** Допустим, что третий постулат модифицирован и разрешает выполнение нескольких складок одновременно. Какие ещё постулаты должны быть изменены?

## Глава 7

### Задача о двух окружностях

Эта глава будет посвящена задаче, имеющей важное значение применительно к вопросу о связи оригами с построениями циркулем и линейкой:

**Задача 14.** *Даны точки  $A, B, C, D$ , причём  $A \neq C$ . Для окружностей  $\hat{A}B$  и  $\hat{C}D$  найти общие точки или установить отсутствие таких точек.*

Наиболее простой является ситуация, когда  $AC > AB + CD$ : в этом случае окружности не имеют общих точек (красные линии на рис. 7.1). Условие легко проверяется копированием отрезков  $AC, AB, CD$  на общую прямую согласно (4.1) и сопоставлением длин.

Немного сложнее равенство  $AC = AB + CD$ , изображённое на рис. 7.1 зелёным цветом и проверяемое аналогичным образом. В этом случае окружности имеют одну общую точку, лежащую на отрезке  $AC$  и отстоящую от его концов на расстояния  $AB$  и  $CD$  соответственно.

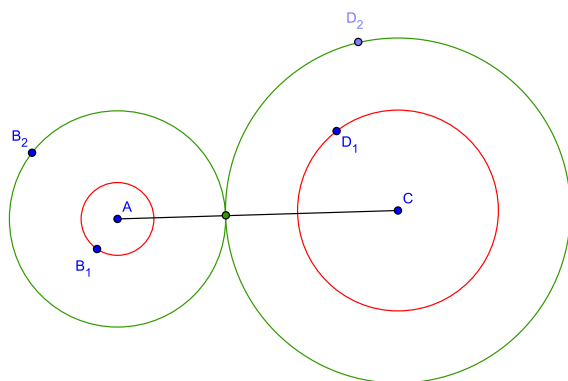


Рис. 7.1: простейшие случаи задачи о двух окружностях.

Возможен ещё случай типа  $AB = AC + CD$ , когда одна окружность находится внутри другой; он также легко распознаётся и не представляет особого интереса.



В случае  $AC > AB + CD$  окружности имеют две точки пересечения, и далее мы будем подразумевать именно этот случай. Эти точки, очевидно, симметричны относительно отрезка  $AC$ , и при наличии циркуля найти их не составляет никакого труда. Однако в системе ОПФ циркуль отсутствует, окружности задаются отрезками (или, что то же самое, двумя точками), и задача об их пересечении становится довольно нетривиальной.

## § 7.1. Инверсионный подход

Изложенный в этом параграфе метод основан на идее из [9, гл. III, ч. 2] — с той разницей, что там она применялась к построениям без прямых (одни только окружности), а мы применим её к построениям без окружностей (одни только прямые).

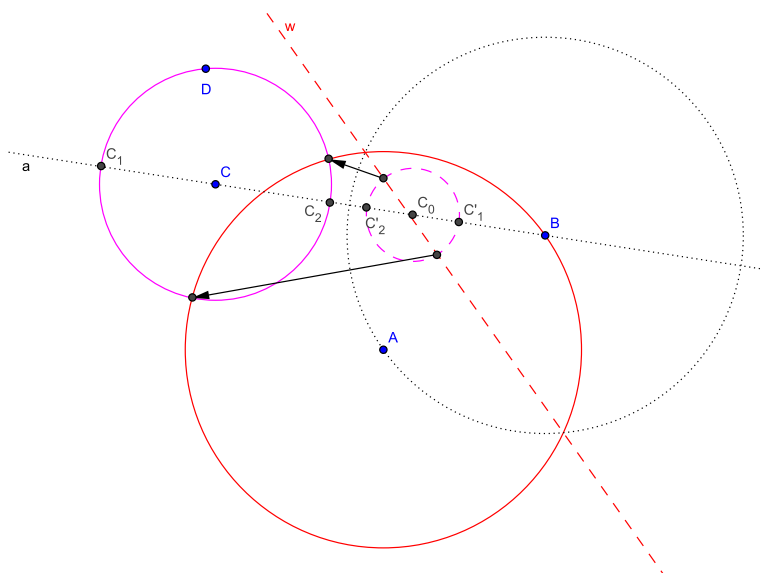


Рис. 7.2: инверсионный подход к задаче о двух окружностях ( $CD \neq BC$ ).

Мы помним, что пятый постулат позволяет непосредственно находить точки пересечения прямых, а пятое правило — точки пересечения прямых с окружностями. Таким образом, если бы удалось редуцировать задачу «окружность × окружность» к задаче «окружность × прямая» или «прямая × прямая», то решение не вызвало бы проблем.

Вспомним теперь преобразование инверсии из § 1.2 и его свойствах. Во-первых, оно при определённых условиях переводит окружность в прямую; во-вторых, его повторное применение даёт исходный объект. Вместе взятые, эти свойства дают ключ к решению задачи о пересечении окружностей.

Возьмём одну из окружностей, например  $\overset{\circ}{A}B$ , и построим её инверсию относительно окружности  $\overset{\circ}{B}A$ . Как уже говорилось (см. упражнение 9 на стр. 17), этим образом будет прямая  $w$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ :

$$\Phi_2(A \leftrightarrow B) \rightarrow w.$$

Далее возможны два случая: либо  $CD \neq BC$ ,  $CD = BC$ . В первом из них окружность  $\hat{C}D$  не проходит через центр инвертора  $B$ , во втором проходит.

Рассмотрим сначала вариант  $CD \neq BC$ , изображённый на рис. 7.2. Образом  $\hat{C}D$  будет некоторая окружность, не проходящая через  $B$ . Чтобы найти её, соединим  $C$  и  $B$  прямой  $a$ :

$$\Phi_1(B \& C) \rightarrow a.$$

Далее найдём точки пересечения  $C_1, C_2$  прямой  $a$  с окружностью  $\hat{C}D$ :

$$\Phi_5(D \leftrightarrow a \mid C) \quad \& \quad D \rightarrow C_1, C_2$$

и построим образы этих точек  $C'_1, C'_2$  посредством алгоритма (4.5). Разделим отрезок  $C'_1C'_2$  пополам с помощью (5.1), найдя точку  $C_0$ . Окружность  $\hat{C}_0C'_1$  и будет образом  $\hat{C}D$  относительно  $\hat{B}A$ .

Дальнейшее очевидно. Нужно найти точки пересечения  $\hat{C}_0C'_1$  с прямой  $w$  посредством

$$\Phi_5(C'_1 \leftrightarrow w \mid C_0)$$

и затем построить их образы — либо с помощью (4.5), либо другим способом.

Например, достаточно вспомнить, что точка и её образ лежат на луче, исходящем из центра инвертора. Соответственно, можно просто построить прямую между  $B$  и найденной точкой, а затем правилом  $\Phi_5$  найти её пересечение с  $\hat{B}A$ .

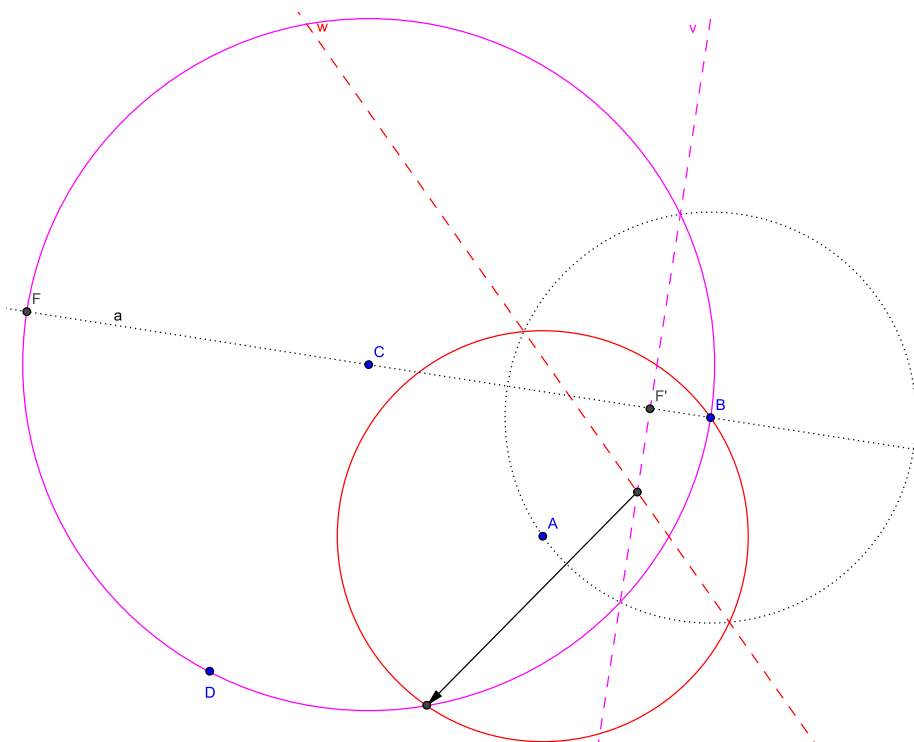


Рис. 7.3: инверсионный подход к задаче о двух окружностях ( $CD = BC$ ).

Пусть теперь  $CD = BC$ , как на рис. 7.3. В этом случае, очевидно, одной из точек пересечения окружностей является  $B$ . Окружность  $\hat{C}D$  проходит через центр инвертора, и образом её будет некоторая прямая  $v$ .

Чтобы её построить, необходимо сначала соединить прямой  $a$  точки  $B$  и  $C$ :

$$\Phi_1(B \& C) \rightarrow a.$$

Затем найдём точку  $F \neq B$ , в которой она пересекается с  $\hat{C}D$ :

$$\Phi_5(D \leftrightarrow a \mid C) \quad \& \quad D \rightarrow F.$$

Найдём её образ  $F'$  посредством (4.5), и тогда

$$\Phi_4(a \leftrightarrow a \mid F') \rightarrow v.$$

Точка пересечения  $v \times w$  находится непосредственно, и далее остаётся лишь найти её инверсию.

## § 7.2. «Чисто эвклидов» подход Геретшлегера

Альтернативный подход к решению задачи о пересечении двух окружностей предложен в статье Р. Геретшлегера [4]. Его можно охарактеризовать как «чисто эвклидов» — в том смысле, что он основан на одной только школьной геометрии и не требует дополнительных знаний.

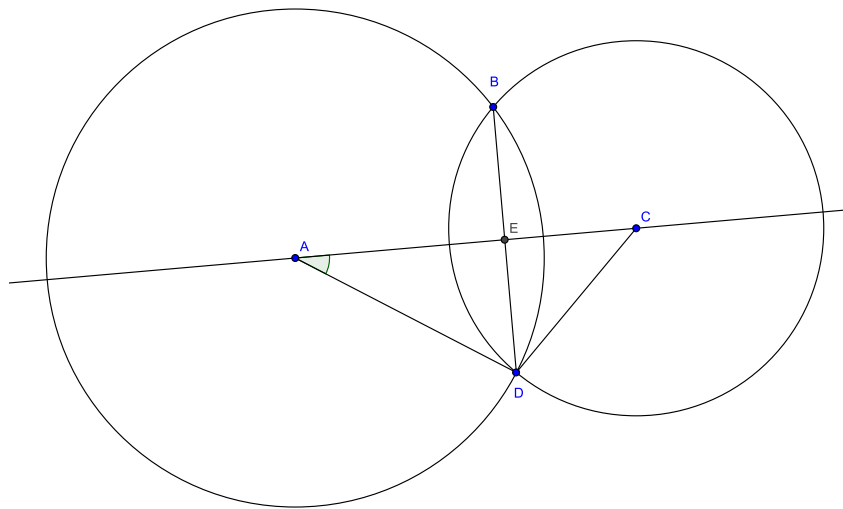


Рис. 7.4: подход Геретшлегера.

Этот подход основан на следующей теореме:

**Теорема 8.** Пусть  $AC < AB + CD$ . Тогда отрезок, соединяющий общие точки окружностей  $\hat{A}B$  и  $\hat{C}D$ , пересекает прямую  $AC$  в такой точке  $E$ , что

$$AE = \frac{AC^2 + AB^2 - CD^2}{2 \cdot AC}. \quad (7.1)$$

Для доказательства рассмотрим треугольник  $\triangle ACD$  (см. рис. 7.4) и воспользуемся для него теоремой косинусов:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos \angle CAD,$$

откуда

$$\cos \angle CAD = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2 \cdot AC \cdot AD}.$$

Соответственно,

$$AE = AD \cdot \cos \angle CAD = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2 \cdot AC}.$$

Подставляя сюда очевидное  $AD = AB$ , получаем формулу (7.1). Если нужно, аналогичное равенство нетрудно получить и для отрезка  $CE$ .

Как видно, формула использует только элементарные арифметические операции, легко выполнимые методами оригами (см. теорему 4).

«Подход Геретшлегера», таким образом, заключается в следующем:

1. Построить прямую  $a$ , соединяющую точки  $A, C$ :

$$\Phi_1(A \& C) \rightarrow a.$$

2. Пользуясь алгоритмами (4.1) и (4.5), построить точку  $E \in a$ , удовлетворяющую соотношению (7.1).

3. Построить перпендикуляр к  $a$  через  $E$ :

$$\Phi_4(a \leftrightarrow a \mid E) \rightarrow b.$$

4. Найти точки пересечения окружностей, выполнив

$$\Phi_5(B \leftrightarrow b \mid A) \rightarrow X_1, X_2.$$

С точки зрения количества действий он не выигрывает у инверсионного подхода (и, пожалуй, даже проигрывает ему), однако если нужно просто доказать *принципиальную разрешимость* задачи 14 средствами оригами, то он гораздо более прост и нагляден.

## Вывод по главе 7

Хотя, как мы увидели, построение точек пересечения двух окружностей методами оригами является вполне разрешимой (и даже не единственным способом) задачей, её решение отнюдь не просто. При наличии выбора всегда следует отдавать предпочтение таким построениям, которые этого не требуют.

Так, например, в [8] были описаны два метода решения квадратного уравнения  $x^2 + \mu = \alpha x$  (со всеми положительными коэффициентами) — под № 22 и № 23. Для реализации средствами оригами первое из них оказывается намного более удобным.

## Упражнения к главе 7

Упражнение 43. Пусть в задаче 14 имеет место равенство  $AC = AB + CD$ . Опишите формально нахождение общей точки двух окружностей.

Упражнение 44. Две различные прямые могут иметь не более одной точки пересечения. Объясните, как тогда в случае  $CD = BC$  получаются две точки пересечения окружностей, для которых прямые являются образамми?

Упражнение 45. Докажите теорему 8, используя координатный метод.

Упражнение 46. Опишите формально построение на основе теоремы 8.

## Глава 8

### «Великие задачи»

С античных времён в геометрии известны три задачи, снискавших титул «великих»:

- **Удвоение куба** — для куба с заданным ребром построить другой куб вдвое большего объёма;
- **Трисекция угла** — разделить на три части произвольный заданный угол;
- **Квадратура круга** — для заданного круга построить равновеликий в смысле площади квадрат или другую элементарную<sup>1</sup> фигуру.

Предполагалось, конечно, что все эти задачи должны решаться «эвклидовыми» построениями циркулем и линейкой.

Лишь в XIX веке была доказана невозможность решения трёх «великих» задач в такой постановке. Пьер Лоран Ванцэль в 1837 году показал, что удвоение куба и трисекция угла не могут быть выполнены циркулем и линейкой — точнее, трисекция выполнима лишь в некоторых отдельных случаях, — а Фердинанд фон Линдеман в 1882 показал, что квадратура круга не может быть выполнена вообще ни в какой алгебраической системе. Обзор неудачных попыток построения квадратуры с подробным разбором можно найти в [8, § 8].

Поскольку система ОПФ является алгебраической (мы видели в главе 6, что она допускает непосредственное решение уравнений до третьей степени включительно), то квадратура круга в ней невыполнима.

Однако, в отличие от циркуля и линейки, методы оригами позволяют точно решать задачи об удвоении куба и трисекции угла — причём решения эти весьма несложны! Все необходимые методы уже были сформулированы ранее.

#### § 8.1. Удвоение куба

Положив сторону удваиваемого куба равной  $x$ , мы получаем его объём равным  $x^3$ . Тогда объём удвоенного куба составит  $2x^3$ , а его сторона должна быть равна  $x\sqrt[3]{2}$ . Задача, таким образом, сводится к построению числа  $\sqrt[3]{2}$  — как мы знаем из § 6.4, вполне возможному.

---

<sup>1</sup>Т.е. такую, граница которой состояла бы из конечного числа отрезков

Для построения можно воспользоваться (6.11) без каких-либо изменений, однако число под корнем — двойка, — таково, что построение очень удобно переносится на «традиционную манеру» оригами, в которой работают с квадратным листом бумаги. Соответствующий вариант изображён на рис. 8.1.

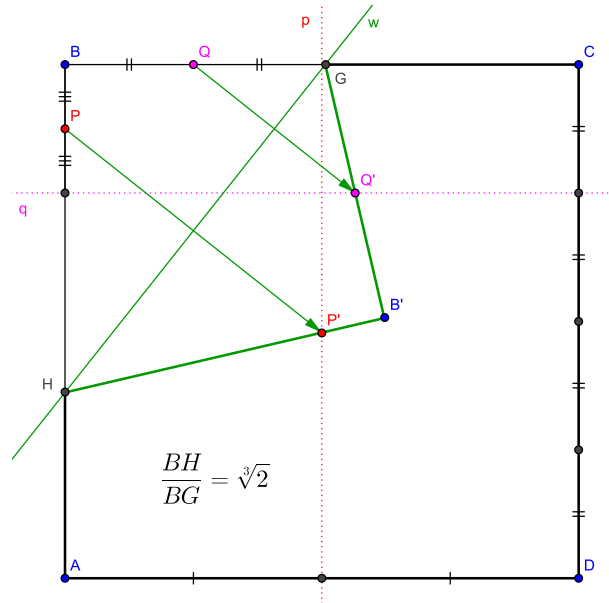


Рис. 8.1: к задаче об удвоении куба.

Прямая  $p$  делит квадрат пополам, а перпендикулярная к ней прямая  $q$  — в соотношении 1:3 (т.е., отрезает от квадрата четверть). Расстояние  $BP$  составляет восьмую часть длины стороны квадрата, а расстояние  $BQ$  — четверть длины стороны. Являясь степенями двойки, они легко строятся посредством сгибаний пополам.

Затем прямая  $w$ , отсекающая угол квадрата  $B$ , строится с помощью

$$\Phi_6(P \leftrightarrow p \ \& \ Q \leftrightarrow q) \rightarrow w.$$

Угол  $\angle BGN$ , который эта прямая составляет со стороной квадрата  $BC$ , имеет своим тангенсом искомый корень  $\sqrt[3]{2}$ :

$$\operatorname{tg} \angle BGN = \frac{BH}{BG} = \sqrt[3]{2}.$$

Если задано ребро куба, подлежащего удвоению — скажем, длиной некоторого отрезка  $BZ$ , — то ребро  $x$  удвоенного куба может быть найдено из пропорции

$$\frac{BH}{BG} = \frac{x}{BZ},$$

решаемой посредством построения (4.5).

Обратите внимание: точка  $G$  не лежит на прямой  $p$  и не является серединой стороны квадрата  $BC$ , хотя близка к этому.

Стоит процитировать статью [4], автор которой, говоря о решении задачи удвоения куба средствами оригами, замечает:

Не исключено, что именно это имел в виду делийский оракул, когда потребовал от афинян<sup>2</sup> удвоить кубический жертвенник Аполлона для прекращения эпидемии. Может, тот оракул был в душе оригамистом.

## § 8.2. Трисекция угла

Согласно тождеству (1.6), если косинус исходного угла равен  $\mu$ , то косинус третьей части этого угла может быть найден из кубического уравнения

$$4x^3 - 3x = \mu.$$

Как мы помним, такое уравнение может быть решено с помощью методов § 6.3. В данном случае, однако, геометрический характер проблемы позволяет решить её более просто.

**Задача 15.** По заданному углу  $\angle VOW$  построить угол в три раза меньшей величины  $\frac{1}{3}\angle VOW$ .

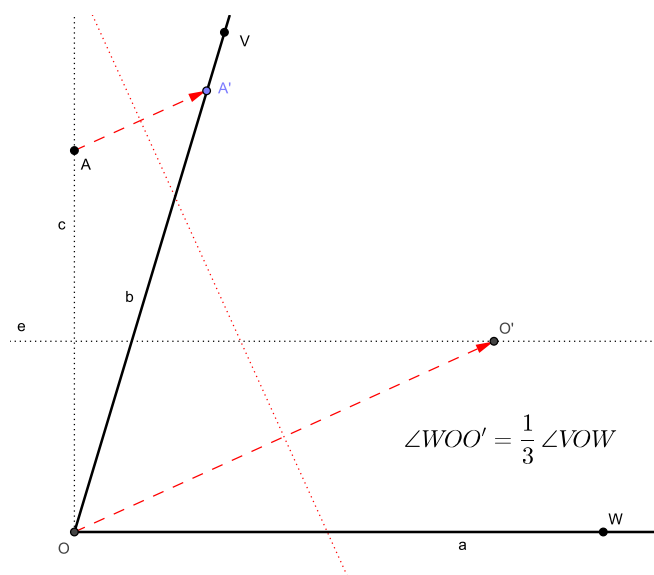


Рис. 8.2: трисекция острого угла.

<sup>2</sup>Здесь автор статьи ошибается. Согласно преданию, с удвоением куба столкнулись не афиняне, а жители острова Делос.





осью симметрии для пар точек  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(C, C')$ , а потому перпендикулярна к соответствующим отрезкам. Расширенный чертёж показан на рис. 8.3.

Заметим сначала, что  $\angle YO'O = \angle Z_2OO'$  (это внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых  $a, e$ ). Кроме того, треугольник  $\triangle YOO'$  по симметрии отрезков  $YO$  и  $YO'$  является равнобедренным — отсюда равенство углов при основании и как следствие

$$\angle YOO' = \angle YO'O = \angle Z_2OO'. \quad (8.2)$$

Далее, в силу симметрии,  $BY = B'Y$ . Но  $BY$  является частью диагонали  $BO'$  в равнобедренной трапеции  $OBV'O'$ , поэтому  $B'Y$  является частью другой диагонали — иными словами, точки  $B', Y, O$  лежат на одной прямой.

В силу той же симметрии,  $YB' \perp Z_1O'$ , так как  $YB \perp Z_1O$  (по построению,  $e \perp c$ ). Кроме того, по построению  $AB = OB$ , и потому  $A'B' = O'B'$ .

Поскольку в треугольнике  $\triangle AOO'$  медиана  $OB'$  одновременно является высотой, этот треугольник оказывается равнобедренным, и  $OB'$  в нём будет также и биссектрисой:

$$\angle A'OB' = \angle O'OB'.$$

Объединяя это равенство с (8.2) и вспоминая, что  $B', Y, O$  лежат на одной прямой, получаем

$$\angle A'OB' = \angle O'OB' = \angle Z_2OO',$$

что и требовалось доказать.

## Вывод по главе 8

Как мы увидели, методы оригами позволяют выполнять построения, невозможные для циркуля и линейки. Обратим внимание, что в материале этой главы ключевым моментом оказывалось применение правила  $\Phi_6$ , позволяющего решать уравнения третьей степени.

## Упражнения к главе 8

**Упражнение 47.** Объясните связь приёма, изображённого на рис. 8.1, и построения (6.11).

**Упражнение 48.** Упростим рис. 8.1, априори предположив, что точка  $G$  делит пополам отрезок  $BC$ . Прямая  $w$  тогда может быть построена посредством

$$\Phi_5(P \leftrightarrow p \mid G) \rightarrow w \quad \text{или} \quad \Phi_5(Q \leftrightarrow q \mid G) \rightarrow w.$$

Запишите формально такое построение и оцените получающуюся при этом погрешность (в каждом случае отдельно).

**Упражнение 49.** С помощью методов оригами постройте углы величины  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ . Какие из этих углов могут быть построены циркулем и линейкой?

## Глава 9

# Правильные многоугольники

Задача о построении правильных многоугольников хотя и не считается «великой», безусловно, оказала огромное влияние на развитие геометрии, и последняя точка в ней была поставлена лишь в первой трети XIX века трудами Карла Фридриха Гаусса и уже упоминавшегося Пьера Лорана Ванцеля. В этой главе мы рассмотрим возможности её решения средствами оригами.

Традиционно считается, что размеры многоугольника не имеют значения, и важно лишь обеспечить для него равенство углов и сторон.

### § 9.1. Общий приём

В § 1.3 мы ввели понятие центрального угла для правильного многоугольника и показали, что нахождение его косинуса сводится к решению алгебраического уравнения. В § 4.6 мы увидели, как можно построить угол по его косинусу, а в главе 6 рассмотрели способы решения алгебраических уравнений. Осталось показать, как строится многоугольник по его известному центральному углу.

**Задача 16.** По данному углу  $\angle VOW = \frac{360^\circ}{n}$  построить правильный  $n$ -угольник.

Пусть точка  $O$  является вершиной заданного угла, а  $V$  и  $W$  лежат на его сторонах. Очевидно, из двух возможных углов, определяемых этими точками, нас интересует *меньший*.

Решение задачи выглядит следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{l} 1 : \Phi_1(O \& V) \rightarrow a_0 \\ 2 : \Phi_1(O \& W) \rightarrow a_1 \\ 3 : A_0 \in a_0 : OA_0 = 1 \quad \& \quad O \dots \{A_0, V\} \\ 4 : A_1 \in a_1 : OA_1 = 1 \quad \& \quad O \dots \{A_1, W\} \\ 5 : \left\{ \begin{array}{l} \Phi_4(a_k) \quad \& \quad A_{k-1} \rightarrow A_{k+1} \\ \Phi_1(O \& A_{k+1}) \rightarrow a_{k+1} \end{array} \right\} \quad k = 1, \dots, (n-2) \end{array} \right. \quad (9.1)$$

После выполнения действий точки  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  окажутся вершинами искомого многоугольника; при необходимости можно построить соединяющие их прямые, фрагменты которых послужат сторонами. На рис. 9.1 изображено начало процесса построения — первый шаг для  $n = 8$  и  $\angle VOW = 45^\circ$ .

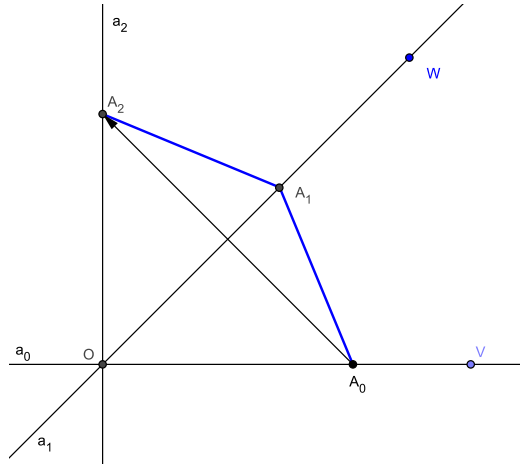


Рис. 9.1: построение многоугольника по центральному углу.

Описанная идея представляет собой самый общий способ. Для конкретных  $n$  могут существовать и гораздо более оптимальные построения — см., например, (4.2) для  $n = 3$ .

Назовём также два следующих очевидных правила:

- Если известен способ построения правильного  $n$ -угольника, то можно построить и  $(2n)$ -угольник, разделив пополам центральный угол правилом  $\Phi_3$ .
- Если известен способ построения правильного  $n$ -угольника, то можно построить и  $(3n)$ -угольник, выполнив трисекцию центрального угла посредством (8.1).

Более общо: для построимого правильного  $n$ -угольника является построимым и  $(2^k 3^m)$ -угольник, где  $k, m$  — целые неотрицательные числа.

## § 9.2. От трёх до девяти

Описав общее правило для построения правильных многоугольников, рассмотрим теперь для примера первые несколько случаев.

Равносторонний треугольник ( $n = 3$ ) и квадрат ( $n = 4$ ) уже были описаны — это построения (4.2) и (4.3) соответственно.

Чтобы решить вопрос о построении пятиугольника, обратимся к (1.8). Из этого тождества следует, что если  $x = \cos \frac{360^\circ}{5} = \cos 72^\circ$ , то эта величина должна удовлетворять уравнению пятой степени

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 1. \quad (9.2)$$

Одним из корней является единица. Деля уравнение на  $(x - 1)$ , получаем полный квадрат, так что (9.2) эквивалентно

$$(x - 1)(4x^2 + 2x - 1)^2 = 0.$$

Найти корни не составляет труда:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_5 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad x_3 = x_4 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Это косинусы углов  $0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$ . Итак,

$$\cos \frac{360^\circ}{5} = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Это величина непосредственно связана с константой золотого сечения (5.4):

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{1}{2\varphi},$$

которая и даёт нам способ построения правильного пятиугольника.

Разделив отрезок в соотношении золотого сечения при помощи (5.5), необходимо затем найти частное от деления меньшего на большее (или большего на целое) и поделить эту величину пополам. Результат будет равен косинусу центрального угла пятиугольника — посредством (4.7) нужно построить этот угол и затем при помощи (9.1) построить весь пятиугольник.

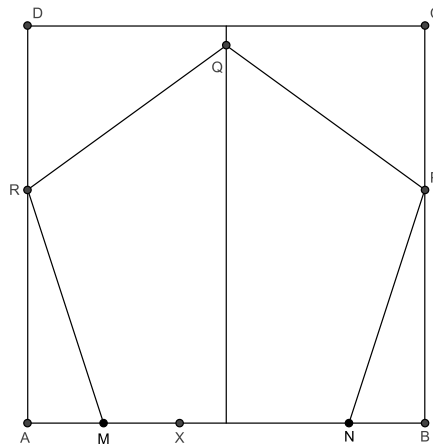


Рис. 9.2: построение правильного пятиугольника.

Этот тот случай, когда более удобным оказывается традиционное оригами на квадратном листе бумаги. Вот как такое построение описывается в [5, гл. IV]:

Чтобы выделить правильный пятиугольник из квадрата ABCD, разделите AB точкой X в золотом соотношении, так что  $AB \cdot AX = BX^2$ , и затем найдите точку M — середину отрезка AX.

Постройте точку N такую, что  $BN = AM$ . Отложите отрезки NP и MR, равные MN, так что точки P и R лежат на сторонах квадрата BC и AD соответственно. Отложите отрезки PQ и RQ той же длины.

Тогда MNPQR есть правильный пятиугольник.

Описанные действия изображены на рис. 9.2; нахождение точки Q облегчается тем, что она в силу симметрии должна лежать на линии, делящей квадрат пополам.

Для построения пятиугольника также можно адаптировать метод из геометрии циркуля и линейки — он описан в [8] под № 26, — однако этот приём требует решения задачи о двух окружностях и оказывается более сложным.

Правильный шестиугольник имеет центральный угол  $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$  — такой же, как угол равностороннего треугольника. Следовательно, его построение является комбинацией (4.2) и (9.1).

Правильный семиугольник, как известно, не может быть построен циркулем и линейкой. Чтобы исследовать возможность его построения средствами оригами, обратимся к идеологии § 1.3.

Тождество для косинуса семикратного аргумента имеет вид

$$\cos 7\varphi = 64 \cos^7 \varphi - 112 \cos^5 \varphi + 56 \cos^3 \varphi - 7 \cos \varphi. \quad (9.3)$$

Полагая в нём  $7\varphi = 360^\circ$  и обозначая  $x = \cos \varphi = \cos \frac{360^\circ}{7}$ , приходим к уравнению

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x = 1. \quad (9.4)$$

Его очевидным корнем является  $x = 1$ . Переносим единицу в левую часть, делим на  $(x - 1)$  и выделяя полный квадрат, получаем, что (9.4) эквивалентно

$$(x - 1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)^2 = 0.$$

Таким образом, косинус центрального угла правильного семиугольника удовлетворяет уравнению

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0. \quad (9.5)$$

Как мы помним, оно может быть решено методами оригами, так что в системе ОПФ правильный семиугольник является построимым.

В идее построения<sup>1</sup> он отличается от пятиугольника начальным шагом: вместо нахождения золотого сечения и деления его пополам необходимо решить (9.5) и далее действовать аналогично.

Правильный восьмиугольник имеет центральный угол, равный  $45^\circ$  — это половина прямого угла. Таким образом, он легко строится комбинацией правил  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$ . В данном случае тот факт, что правило  $\Phi_3$  делит пополам сразу *оба* угла между двумя прямыми, оказывается особенно удобным.

<sup>1</sup>Интересно, что в книге [5] о семиугольнике вообще нет упоминаний: на момент её написания (а это конец XIX века!) автор просто не знал, что по возможностям построений оригами превосходит циркуль и линейку.

Наконец, правильный девятиугольник имеет центральный угол, равный  $40^\circ$ . Это две трети от угла  $60^\circ$ , которым обладает равносторонний треугольник. Соответственно, построив такой треугольник с помощью (4.2) и затем разделив его угол на три пополам посредством (8.1), нужно затем применить построение (9.1).

## Вывод по главе 9

Возможности оригами позволяют удваивать и утраивать число сторон уже построенных правильных многоугольников (циркуль и линейка — только удваивать). По части «базовых» построений, не использующих этот приём, оригами также превосходит циркуль и линейку: возможно, например, построить семиугольник.

Пока остаётся открытым вопрос о том, какие вообще правильные многоугольники могут быть построены методами оригами — понятно только, что в формулу должен входить множитель  $2^k 3^m$ . Полный ответ на этот вопрос будет дан в следующей, заключительной главе.

## Упражнения к главе 9

*Упражнение 50. У правильного многоугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Укажите два различных способа нахождения этой точки по заданному (уже как-то построенному) многоугольнику.*

*Упражнение 51. Как следует изменить построение (9.1), чтобы нумерация вершин многоугольника выполнялась в обратном порядке?*

*Упражнение 52. Постройте правильный шестиугольник, длина стороны которого совпадает с длиной заданного отрезка. Как следует изменить (9.1), чтобы получающийся многоугольник имел нужную сторону?*

*Упражнение 53. Выведите тождество (9.3) для косинуса семикратного угла.*

*Упражнение 54. Решив при помощи какой-либо системы динамической геометрии (см. приложение В) уравнение (9.5) на основе теоремы 6, постройте правильный семиугольник.*

*Упражнение 55. Запишите полностью построение правильного восьмиугольника, вписанного в единичную окружность.*

*Упражнение 56. При помощи какой-либо системы динамической геометрии (см. приложение В) постройте правильный девятиугольник.*

*Упражнение 57. Укажите способ построения правильного 360-угольника. Можно ли построить его циркулем и линейкой?*

# Глава 10

## Теоремы о построимости

В этой главе мы завершим изложение рядом теорем, описывающих возможности и ограничения геометрических построений средствами оригами. Мы также сравним эти возможности с другой — самой, пожалуй, известной — геометрической системой, а именно циркулем и линейкой.

### § 10.1. Построимые числа

Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ . Многократным повторением единичного отрезка (4.1) построим эти числа геометрически и затем посредством (4.5) найдём их отношение  $\frac{n}{m}$ . Очевидно, так можно построить любое рациональное число. (Можно поступить и по-другому — разделить произвольный отрезок в соотношении  $n : m$ , получив длины  $a, b$  и применить затем (4.5) к этим длинам.)

Далее, вспоминая теорему 7, приходим к следующему выводу:

**Теорема 9.** *Любое рациональное число, а равно и всякое число, выражаемое посредством конечного количества арифметических действий (включая сюда нахождение целых степеней) и операций извлечения квадратного либо кубического корня относительно рациональных чисел, может быть построено с помощью методов оригами.*

На основании результатов главы 6, можно добавить к этому следующее утверждение относительно алгебраических уравнений:

**Теорема 10.** *Методы оригами позволяют строить любые числа, являющиеся решениями алгебраических уравнений первой, второй и третьей степеней. Соответственно, любое из названных уравнений может быть решено методами оригами (или для него установлен факт отсутствия решения).*

Обе эти теоремы, конечно, подразумевают учёт знаков для действий с отрицательными числами. Пример того, как это делается, мы видели в § 6.1.

Кроме того, без особого труда можно разработать построения для выполнения действий с векторами на плоскости и с комплексными числами, задаваемыми векторами. В частности, могут быть выполнены все четыре арифметических действия над комплексными числами.



## § 10.2. От оригами к циркулю и линейке

Вспомним (см. главу 2) шесть правил Фудзиты  $\Phi_1, \dots, \Phi_6$  и их геометрический смысл:

- $\Phi_1$  — проведение прямой через две точки;
- $\Phi_2$  — построение серединного перпендикуляра к двум точкам;
- $\Phi_3$  — построение биссектрисы углов между двумя прямыми;
- $\Phi_4$  — построение перпендикуляра к прямой через точку;
- $\Phi_5$  — нахождение точек пересечения прямой и окружности;
- $\Phi_6$  — построение общей касательной к двум параболам.

Известно [8], что из этих шести действий первые пять выполнимы циркулем и линейкой ( $\Phi_1$  и  $\Phi_5$  в системе ЦЛ рассматриваются как элементарные); последнее же выполнено быть не может, так как выходит за рамки решаемых циркулем-линейкой уравнений первого-второго порядка.

Копирование точки при сложном чертеже, допускаемое восьмым постулатом, представляет собой симметрию относительно прямой — действие, также доступное для циркуля и линейки.

Таким образом, справедлива...

**Теорема 11.** *Любые точки и прямые, которые могут быть построены методами оригами без использования шестого правила Фудзиты  $\Phi_6$ , также могут быть построены циркулем и линейкой на евклидовой плоскости.*

Подобный «перевод построений с языка ОФП на язык ЦЛ» представляет собой чисто техническую задачу: аналоги правил  $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  очень просты. В [8] они описаны под номерами 1–3.

## § 10.3. От циркуля и линейки к оригами

Геометрия циркуля и линейки основана на следующих пяти действиях [4]:

1. Проведение прямой через две различные точки;
2. проведение окружности с заданным центром и радиусом;
3. выявление точки пересечения двух прямых (или её отсутствия);
4. выявление точек пересечения прямой с окружностью (либо их отсутствия);
5. выявление взаимного расположения двух окружностей и точек их пересечения (либо их отсутствия).

Рассмотрим их подробнее.

Первое действие выполнимо средствами оригами: правило  $\Phi_1$  гарантирует существование складки-прямой, соединяющей две произвольные точки.

Что касается второго действия, то окружность нельзя построить в виде *линии* — однако, зная её центр и радиус, можно построить сколько угодно лежащих на окружности точек, а также радиусов и касательных, связанных с этими точками.

Выполнимость третьего действия непосредственно обеспечивается пятым постулатом.

Четвёртое действие выполнимо: правило  $\Phi_5$  позволяет находить точки пересечения прямой с окружностью (заданной своим центром и лежащей на ней точкой).

Пятое действие выполнимо: оно представляет собой не что иное, как решение задачи о двух окружностях, которой посвящена глава 7.

Все эти рассуждения можно обобщить в виде следующей теоремы:

**Теорема 12.** *Любые точки и прямые, которые могут быть построены циркулем и линейкой на евклидовой плоскости, также могут быть построены средствами оригами. Окружность (или её часть) не может быть построена в виде непрерывной линии, однако при известном центре и радиусе можно построить любой число принадлежащих ей точек с соответствующими радиусами и касательными.*

## § 10.4. Построимые многоугольники

В предыдущей главе мы убедились, что возможности оригами по части построения правильных многоугольников превосходят возможности циркуля и линейки, однако вопрос о границе этих возможностей остался открытым.

Ответ на него даёт следующая теорема, сформулированная и доказанная в [6]:

**Теорема 13.** *В любой геометрической системе, располагающей эквивалентами циркуля, линейки и трисектора угла, правильный многоугольник является построимым в том и только том случае, когда число его вершин допускает представление в виде*

$$2^i \cdot 3^j \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_k, \quad (10.1)$$

где  $i, j, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , а все множители  $\lambda$  представляют собой различные простые числа вида  $(2^n \cdot 3^m + 1)$ .

Мы знаем, что оригами допускает любое построение, выполнимое циркулем и линейкой, и трисекция угла также выполнима в ОПФ, — поэтому любой многоугольник с числом сторон (10.1) может быть построен<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>В применении теоремы 13 к оригами есть один тонкий момент. Правило  $\Phi_6$  допускает трисекцию угла, но не эквивалентно ей — оно имеет более широкие возможности. Как следствие, слова «...и только том...» требуют осторожности. На данный момент, впрочем, неизвестен ни один правильный многоугольник, который может быть построен методами оригами, но не подпадает под условие теоремы.

Происхождение множителя  $(2^i \cdot 3^j)$  в формуле (10.1) было объяснено в § 9.1, что же касается множителей  $\lambda$ , то их появление не может быть объяснено без методов высшей алгебры, далеко выходящих за рамки школьного курса.

Такие числа известны как *числа Пьерпонта*. Предполагается — хотя пока и не доказано! — что *простых* чисел Пьерпонта бесконечно много. Ими, например, являются пятёрка:

$$5 = 2^2 \cdot 3^0 + 1$$

и семёрка:

$$7 = 2^1 \cdot 3^1 + 1.$$

## Упражнения к главе 10

**Упражнение 58** (для знакомых с понятием вектора). *На плоскости заданы три различные точки  $O, V, W$ . Постройте такие точки  $X$  и  $Y$ , для которых выполняются векторные равенства*

$$\overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OX} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OY}.$$

**Упражнение 59.** *Пусть  $n = 10, 11, \dots, 25$ . Какие  $n$ -угольники нельзя построить методами оригами? Какие можно построить методами оригами, но нельзя циркулем и линейкой?*

**Упражнение 60.** *Любое кубическое уравнение с вещественными коэффициентами всегда имеет по меньшей мере один вещественный корень. Объясните, почему тогда в шестом правиле Фудзиты возможна ситуация, когда нельзя построить требуемую складку?*

# Заключение

Оригами-построения на основе правил Фудзиты представляют собой интересный альтернативный взгляд на геометрию — однако достаточно очевидно, что этот интерес носит чисто познавательный характер. Их практическая и прикладная ценность крайне невелика.

Как следствие, соответствующая литература очень немногочисленна. На русском языке она отсутствует как таковая: самое большее, что можно найти — это отдельные записи в научно-популярных блогах, авторы которых описывают ОПФ как забавный математический курьёз и ограничиваются кратким описанием трисекции угла либо удвоения куба (всегда без доказательств и часто с ошибками).

Англоязычные материалы более обширны, однако имеют свою специфику. Их авторы почти всегда увлекаются какими-то конкретными аспектами, отчего рассказ нередко получается однобоким. Так, чуть ли не четверть книги [7] посвящена вопросам о соотношении длин отрезков, получающихся при складывании квадрата.

Среди этих материалов наиболее значительны статьи и книги [1, 2, 4]. С определёнными оговорками можно назвать здесь же книгу [5], написанную более ста лет назад — в ней содержится немало интересного, но многие результаты тогда просто не были известны.

Некоторые авторы питают ярко выраженное пристрастие к *традиционному* оригами на квадратном листе бумаги — таков, например, Казуо Хага<sup>2</sup>.

Логическим фундаментом этого мемуара послужил написанный мной ранее обзор [8], посвящённый методам геометрических построений циркулем и линейкой, а также их связи с алгеброй. Тамашняя структура изложения в целом сохранена и здесь — конечно, насколько это возможно.

Наконец, не могу не упомянуть замечательную книгу [9], оказавшую очень большое влияние на мои геометрические воззрения и, как следствие, на манеру изложения. Некоторые доказательства вводной части взяты из неё без всяких изменений.

Методика решения квадратных уравнений основана на статье [10], о чём подробно сказано в отступлении между главами 5 и 6.

---

<sup>2</sup>Ничего удивительного: его книга была частично спонсирована японским министерством просвещения, так что подчёркивание исконных традиций в данном случае легко предсказуемо.

# Приложение А

## История алгебраических уравнений

Судя по наиболее древним сохранившимся рукописям, египтяне умели решать линейные уравнения ещё в XIX веке до нашей эры. Для этого, правда, использовался громоздкий и нерациональный приём — так называемый метод ложных положений. Суть его заключается в том, что выбирается некоторое приближение к решению, подставляется в уравнение, и затем по «расхождению» левой и правой частей это приближение корректируется.

Решение квадратных уравнений трудно датировать каким-то одним историческим периодом. Вторая книга «Начал» Эвклида (написанная в III веке до нашей эры) посвящена специфическим геометрическим построениям, совершенно явно ориентированным на квадратные уравнения, — однако эллинистическая математика тогда ещё не знала общей теории их решения.

Такая теория, стройная и последовательная, появилась лишь у арабских математиков, и во времена Мухаммада ибн-Мусы аль-Хорезми (VIII век) она начинает «обрастать» истинно алгебраическими методами: уничтожение одинаковых слагаемых в обеих частях равенства, перенос слагаемых и т.п. Доказательства методов, впрочем, у аль-Хорезми пока ещё носят чисто геометрический характер.

Ко времени Омара Хайяма (XI век) формирование теории уже вполне завершено и она перестала считаться «остриём науки» — хотя и находилась, конечно, на уровне тогдашнего «высшего образования». Тогда же было замечено, что квадратное уравнение может иметь два различных корня (арабы и греки не знали отрицательных чисел!). Алгебраические же формулы для решения квадратных уравнений появились только в XVI веке у Рафаэля «Бомбелли» Маццоли, который ещё будет упомянут ниже.

Хайяму принадлежит и разработка геометрической теории кубических уравнений, основанной на интерпретации конических сечений. По-видимому, это была абсолютная вершина того, что можно было сделать без алгебраической нотации: за последующие пятьсот лет математики ничего не смогли к ней добавить. Всё это время оставался неизвестным тот факт, что кубическое уравнение может иметь три различных положительных вещественных корня.

Омар Хайям высказал твёрдое убеждение, что должен существовать общий метод решения, но он был найден лишь в XVI веке в Италии, и его появление сопровождалось поистине драматическими событиями авантюрного характера. События эти по сей день составляют одну из самых необычных страниц в истории математики.

Всё началось с того, что Сципион дель Ферро обнаружил способ решения неполного кубического уравнения

$$x^3 + \alpha x = \beta, \quad (\text{A.1})$$

который в нынешних обозначениях имеет следующий вид:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}} + \frac{\beta}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}} - \frac{\beta}{2}}. \quad (\text{A.2})$$

Здесь по-прежнему предполагается, что коэффициенты положительны:  $\alpha, \beta > 0$ .

Дель Ферро не публиковал своё открытие и сохранил его в тайне, завещав двум наследникам — зятю Аннибалу дельла-Навье и ученику Антонио Фиоре.

Впоследствии формулу (A.2) узнал Никколо «Тарталья» Фонтанá, то ли пероткрывший её самостоятельно, то ли нашедший её в черновиках дель Ферро (к которым он имел доступ). Бесспорно лишь то, что он сумел адаптировать выражение к случаю  $\alpha < 0$ , решив таким образом не только (A.1), но и

$$x^3 = \alpha x + \beta.$$

Эта модификация позволила ему победить Фиоре в одном из популярных тогда «математических турниров».

После долгих уговоров Тарталья в 1539 году открыл секрет Джироламо Кардано — под клятвенным обещанием не публиковать метод без его явного разрешения.

Кардано ещё усовершенствовал метод: сначала он нашёл модификацию (A.2) для случая  $\beta < 0$  (таким образом, «закрыв» все варианты выбора знаков коэффициентов), а затем обнаружил способ, которым *любое* кубическое уравнение приводится к неполному виду без квадратичного члена типа (A.1). Затем его ученик Лодовико Феррари открыл способ приведения уравнения *четвёртой* степени к набору кубических и квадратных. Наконец, Кардано заметил и исследовал случай трёх различных вещественных решений.

Делла-Навье, не любивший выскочку Тарталью, показал Кардано завещание своего тестя и учителя. После этого, видимо, Кардано счёл себя свободным от данного обещания. Действительно, он ведь увидел ту же формулу в бумагах дель Ферро, заведомо более ранних, чем работы Тарталья, причём законный владелец бумаг не накладывал на него никаких условий. В 1545 году вышла книга «Великое искусство», где были изложены все связанные с кубическими уравнениями исследования.

Несмотря на то, что Кардано честно указал авторство и источники<sup>1</sup> всех результатов, Тарталья счёл себя обманутым, страшно разозлился и стал преследовать его.

Общественное мнение, однако, обернулось против: Тарталья вчистую проиграл публичный диспут против Феррари (тот вступился за честь учителя, покинувшего страну по семейным обстоятельствам), растерял всех своих покровителей, получил отказы по ранее предлагавшимся ему должностям, и остаток жизни прожил в

---

<sup>1</sup> «Сципион дель Ферро открыл формулу для уравнения “куб неизвестного плюс неизвестное равны числу”. <...> Славу эту делит с ним наш друг Никколо Тарталья из Брешии, который, будучи вызванным на состязание с учеником дель Ферро по имени Антонио Марио Фиоре, решил, дабы не быть посрамлённым, ту же самую проблему, и после многих просьб передал мне решение.»

большой нужде, почти в нищете. Ещё более он был наказан тем, что знаменитая формула вошла в историю под фамилией его обидчика.

Конец истории положили работы уже названного Бомбелли — пользуясь комплексными числами, он свёл все возможные случаи знаков  $\alpha$ ,  $\beta$  в единую формулу и объяснил с этой точки зрения самый неприятный случай трёх различных вещественных решений.

Вопрос об уравнениях более высоких степеней (пятой, шестой и т.д.) был закрыт лишь в XIX веке. Норвежец Нильс Хенрик Абель в 1824 году доказал, что в общем случае их решение не может быть выражено через радикалы и арифметические операции (теорема Абеля—Руффини). Позднее, опираясь на его работу, француз Эварист Галуа создал самостоятельную теорию<sup>2</sup>, из которой тот же результат следовал ещё более изящным образом.

Интересно, что существуют *точные* способы решения алгебраических уравнений, не сводящиеся к радикалам. Так, любое алгебраическое уравнение может быть точно решено методами оригами, если допустить одновременное выполнение нужного числа складок. Подробности см. в [3]. В частности, теорема 6 приводит к точному решению кубического уравнения без какого-либо использования формулы Кардано.

Нужно также отметить, что даже если уравнение имеет вещественные коэффициенты и его корни также вещественны, и для него существует решение в радикалах, то далеко не всегда эти радикалы будут выражаться *вещественными числами*. Таково, например, уравнение

$$x^3 - 73x - 72 = 0,$$

имеющее корни  $x_1 = -8$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 9$ .

---

<sup>2</sup>В биографиях Абеля и Галуа есть немало сходство. Оба обладали совершенно исключительными математическими способностями, оба получили известность благодаря одной проблеме... и оба прожили совсем недолго. Абель умер в возрасте 26 лет от туберкулёза, Галуа погиб в 20 лет на дуэли.

# Приложение В

## Оригами и динамическая геометрия

Как мы увидели, в качестве идеальной модели геометрических построений оригами не уступает циркулю и линейке — а по возможностям и превосходит их. К сожалению, этого нельзя сказать об удобстве практического применения.

Вопреки постулатам, *реальная бумага* отнюдь не безразмерна, не обладает прозрачностью и всё же деформируется при многократных перегибаниях. Выполнение построений существенно упрощается при использовании программ динамической геометрии, но среди них нет специализированных, ориентированных именно на оригами... во всяком случае, мне такие неизвестны.

Вообще говоря, применение правил  $\Phi_1 \dots \Phi_5$  не вызывает трудностей в *любой* динамической геометрии: как мы видели в § 10.2, их аналогами являются достаточно элементарные действия, легко выполнимые циркулем и линейкой. Копирование точки, составляющее суть восьмого постулата, есть не что иное, как симметрия точки относительно прямой, и также легко выполнимо.

Сложнее обстоит дело с правилом  $\Phi_6$ , которое не может быть реализовано в рамках системы ЦЛ. Однако, в свете главы 2, если динамическая геометрия позволяет работать с параболой, то  $\Phi_6$  может быть «эмулировано» с весьма небольшими усилиями. Например, это возможно в бесплатной системе GeoGebra<sup>1</sup>, использованной при подготовке данного текста. Рассмотрим методику такой эмуляции.

Пусть для данных точек  $P, Q$  и прямых  $p, q$  требуется выполнить

$$\Phi_6(P \leftrightarrow p \ \& \ Q \leftrightarrow q) \rightarrow w.$$

Это можно проделать следующим образом:

1. Построить параболы  $P\check{p}$  и  $Q\check{q}$ .
2. Построить произвольные точки  $V \in P\check{p}$  и  $W \in Q\check{q}$ . Соединить их прямой  $w$ .
3. Построить точки  $P'$  и  $Q'$ , являющиеся симметричными образами  $P$  относительно  $p$  и  $Q$  относительно  $q$  (рис. В.1, слева).
4. Двигая вручную точки  $V$  и  $W$  по параболам, добиться попадания их образов на прямые:  $P' \in p$  и  $Q' \in q$ . Задача визуально облегчается тем, что результирующая прямая  $w$  должна касаться обеих парабол, т.е. иметь с каждой из них лишь одну общую точку (рис. В.1, справа).

---

<sup>1</sup><http://www.geogebra.org>



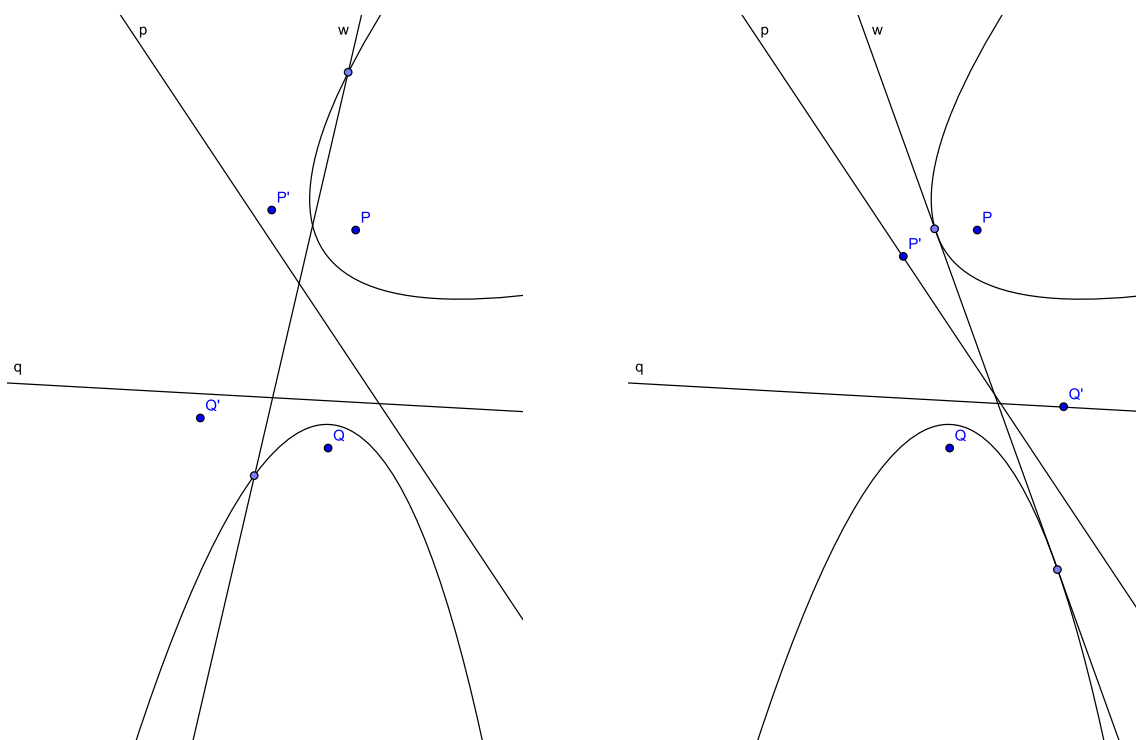


Рис. В.1: эмуляция правила  $\Phi_6$  в GeoGebra.

5. Если необходимо, скрыть на чертеже точки  $V, W$  и обе параболы.
6. **Напоминание:** требуемая складка  $w$  может быть не единственной или вовсе не существовать! Возможно, имеет смысл попробовать повторить шаги 2–5.

(На чертеже В.1 точки  $V$  и  $W$  показаны «безымянными», дабы не загромождать его лишними обозначениями.)

Разумеется, этот приём, хоть и даёт хорошие результаты, в действительности является *приближённым*. На получившемся чертеже нельзя доверять измерениям более, чем на один-два знака после запятой.

# Литература

- [1] *R. Lang Origami Geometric Constructions*. — Онлайн<sup>2</sup>. 19, 23, 37, 39, 74
- [2] *K. Hatori Origami Construction*. — Онлайн<sup>3</sup>. 19, 48, 74
- [3] *R. Alperin, R. Lang One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms*. — Онлайн<sup>4</sup>. 26, 52, 77
- [4] *R. Geretschläger Euclidean Constructions and the Geometry of Origami*. — *Mathematics Magazine*, Vol. 68, No. 5, December 1995, pp. 357–371. 49, 57, 62, 71, 74
- [5] *T. Sundara Row Geometric Exercises in Paper Folding*. — The Open Court Publishing Company, 1917 (3rd Edition). 10, 14, 67, 68, 74
- [6] *A. Gleason Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon*. — *The American Math Monthly*, Vol. 95, № 3 (Mar. 1988), pp. 185–194. 72
- [7] *K. Haga Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding*. — World Scientific Publishing Co., 2008. 39, 74
- [8] *М. Баландин Введение в построения циркулем и линейкой*. — Онлайн<sup>5</sup>. 6, 14, 37, 43, 51, 58, 60, 68, 71, 74
- [9] *Р. Курант, Г. Роббинс Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов*. — М: МЦНМО, 2007. 6, 10, 16, 25, 47, 55, 74
- [10] *А. Пресман Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки*. — «Квант», 1972, № 4, стр. 34–35. 43, 74

---

<sup>2</sup><http://www.langorigami.com/science/math/hja/hja.php>

<sup>3</sup><http://origami.ousaan.com/library/conste.html>

<sup>4</sup><http://people.math.gatech.edu/~aleykin3/math6122spr12/PROJECTS/Origami%20Axioms...%20Alperin-Lang.pdf>

<sup>5</sup><http://cl.ly/QRzJ>