Введение в анализ: Тождества и неравенства

Михаил Баландин[1]

Октябрь 2014 – март 2015

[1]Новосибирск, michael.balandin@gmail.com

Аннотация

В качестве введения в математический анализ рассматриваются важнейшие тождества и неравенства с подробными доказательствами различными способами и обсуждением их значения для последующего курса. Представленные методы доказательства и вывода имеют немалое самостоятельное значение для развития математического мышления; некоторые из них обычно освещается в учебной литературе крайне редко.

Содержание

Предисловие 2

Основные обозначения и теоретические сведения 3

Тождества и неравенства 5
- Бином Ньютона 5
- Неравенство Коши для сумм 6
- Неравенство Бернулли 7
- Сумма арифметической прогрессии 8
- Преобразование Абеля 8
- Тождество Архимеда 9
- Принцип телескопических сумм 10
- Сумма геометрической прогрессии 11
- Суммирование выделением зависимости 12
- Факториал и показательная функция 13
- ВАЖНОЕ ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ 13
- Число и его экспонента, число и его логарифм 14
- Основание натуральных логарифмов 15
- Степенная и показательная функции 16
- Факториал и автостепень 17
- Факториал и показательная функция (окончание) 19

Историческая справка 20

Упражнения 22

Литература 24

Предисловие

Предлагаемый материал адресован студентам-первокурсникам — вчерашним школьникам, — начинающим обучение на математических и околоматематических факультетах. Подбор этого материала полностью отвечает заявленному названию „введение в анализ“ и преследует две цели.

Во-первых, показать студентам на сравнительно несложных примерах многообразие и богатство *точных и строгих* приёмов математических преобразований, доказательств и получения оценок. А равно и подчеркнуть эту строгость и точность по сравнению со школьным догматическим подходом.

Во-вторых, вывести или строго доказать с использованием этих приёмов ряд тождеств и неравенств, которые не входят в школьную программу, но активно используются в последующих разделах анализа. Здесь я вкладываю в слово „анализ“ его изначальный смысл — практические методы, основанные на предельных переходах.

Материал не требует каких-то специальных знаний сверх школьной программы по математике, хотя по ходу изложения будут иногда упоминаться понятия, которых первокурсник в первые недели занятий пока не знает. Правильно сориентировать студента относительно этих понятий является естественной задачей преподавателя.

Идеологически эти заметки предшествуют рукописям [1] и [2] — по существу, расширенным авторским конспектам практических занятий, — хотя те были написаны и частично изданы несколькими годами ранее.

Обозначения, соглашения и некоторые теоретические сведения

На последующих страницах мы часто будем встречать слово „последовательность“. Формально это понятие определяется так:

> *(Числовой) последовательностью называется отображение натуральных чисел в вещественные.*

Понятие „отображение“ (то же, что и функция), вообще говоря, гораздо более сложно, нежели это представлено в школьном курсе математики, однако пока нам будет вполне достаточно школьных представлений.

Итак, если речь идёт о последовательности x_n, то подразумевается, что для всех $n \in \mathbb{N}$ задана функция $x(n)$, которая по натуральному числу n возвращает некоторый вещественный результат.

Авторы различных математических книг и курсов по-разному решают для себя вопрос о том, является ли нуль натуральным числом. Мы будем полагать, что счёт натуральных чисел начинается с единицы и, следовательно, *нуль не принадлежит множеству* $\mathbb{N}$.

Изредка мы будем — несколько забегая вперёд — упоминать такие понятия, как предел последовательности, ряд и т.п. Это делается исключительно „на будущее“ и для справки, так что вникать в них не требуется.

Для сумм будет использоваться широко принятая в математике сигма-нотация, в которой запись

$$\sum_{k=1}^{n} x_k$$

означает сложение таких x_k, у которых индекс k пробегает все значения $1, 2, \ldots, n$, то есть

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Детальное объяснение правил действия с этим символом является задачей преподавателя; здесь же мы отметим лишь некоторые важнейшие.

Во-первых, из-под знака суммы может быть вынесено любое выражение, не зависящее прямым или косвенным образом от индекса суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n} a x_k = a \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_j = y_j \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Во-вторых, суммирование в сигма-нотации может объединяться из нескольких частей или разбиваться на части — например, так:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} + x_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+2} x_k, \qquad \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

В-третьих, одно и то же суммирование может быть записано несколькими разными способами со сдвигом индекса:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} x_{k-1}.$$

Обзор таких правил с примерами можно найти в [4, п. 2.1], а также в [3].

Аналогичное обозначение, только с другим символом, используется для сокращённой записи произведений:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n.$$

Правила действий с такими произведениями в целом аналогичны правилам для сумм, однако вынесение общего множителя, не зависящего от индекса, выполняется по-другому:

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda_j x_k = (\lambda_j)^n \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

Степень, с которой выносится множитель, соответствует общему количеству всех множителей, образующих произведение.

Тождества и неравенства

Бином Ньютона

Для любых (в том числе комплексных) чисел x, y и любого натурального числа n справедлива формула *бинома Ньютона*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n. \qquad (1)$$

Здесь величины C_n^k — это так называемые *биномиальные коэффициенты*, вычисляемые по формулам

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n. \qquad (2)$$

Каждый такой коэффициент C_n^k равен числу способов, которыми из n объектов можно выбрать k-элементное подмножество (включая в этот счёт пустое множество при $k = 0$). В англоязычной литературе для биномиальных коэффициентов встречается также альтернативное обозначение:

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k}.$$

Напоминание: факториал нуля равен единице, т.е. $0! = 1$. (Факториал $n!$ есть количество способов, которыми можно взаимно переставить между собой n объектов; отсутствие же объектов не допускает никаких перестановок и существует в единственно мыслимом варианте. К этому же результату можно прийти, исходя из равенства $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, положив в нём $n = 0$ и зная, что $1! = 1$.)

Докажем тождество (1), пользуясь методом математической индукции. При $n = 1$ имеем

$$(x+y)^1 = C_1^0 x + C_1^1 y.$$

Это равенство справедливо, так как непосредственно из (2) следует, что $C_n^0 = C_n^n \equiv 1$ при любом натуральном n.

Покажем теперь переход от n к $(n+1)$; для этого умножим предположительно справедливое равенство (1) на $(x+y)$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n)(x+y) = \\
&= C_n^0 x^{n+1} + C_n^1 x^n y + \dots + C_n^{n-1} x^2 y^{n-1} + C_n^n x y^n + C_n^0 x^n y + C_n^1 x^{n-1} y^2 + \dots C_n^{n-1} x y^n + C_n^n y^{n+1} = \\
&= C_n^0 x^{n+1} + (C_n^1 + C_n^0) x^n y + (C_n^2 + C_n^1) x^{n-1} y^2 + \dots + (C_n^n + C_n^{n-1}) x y^n + C_n^n y^{n+1}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Преобразуем правую часть получившегося выражения. Заметим прежде всего, что

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)n!\cdot 0!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!} = C_{n+1}^{n+1},$$

и точно так же, с точностью до перемены мест сомножителей в знаменателе, $C_n^0 = C_{n+1}^0$. Вообще, $C_n^k \equiv C_n^{n-k}$.

Далее рассмотрим суммы биномиальных коэффициентов в скобках:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!\cdot(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

(Это соотношение лежит в основе так называемого треугольника Паскаля.)

Подставляя полученные соотношения в (3), получаем

$$(x+y)^{n+1} = C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n y + \dots + C_{n+1}^n x y^n + C_{n+1}^{n+1} y^{n+1},$$

а это в точности совпадает с (1) для случая $(n+1)$ вместо n.

Итак, индукционный переход показан и тем самым формула (1) справедлива при всех натуральных n.

Формула бинома Ньютона играет в математике огромную роль. Она широко используется для преобразования и упрощения выражений с суммами; у неё существуют обобщения для произвольных степеней и степени суммы более чем двух слагаемых. Биномиальные коэффициенты и их свойства активно применяются в комбинаторике и её приложениях — например, в теории вероятностей.

Неравенство Коши для сумм

Для любого натурального числа n и любых наборов вещественных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ справедливо *неравенство Коши*:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right). \tag{4}$$

Оно также может быть записано в векторной форме:

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2. \tag{5}$$

Для доказательства рассмотрим заведомо справедливое неравенство

$$\sum_{k=1}^n (x_k + t y_k)^2 \geqslant 0,$$

выполняющееся при любом вещественном t. Раскроем скобки в каждом из его слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k + ty_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + 2tx_k + t^2x_k^k) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2t\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + t^2\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \geqslant 0.$$

Введём обозначения

$$A = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \qquad C = \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

В них неравенство принимает вид

$$A + 2Bt + Ct^2 \geqslant 0.$$

Очевидно, $C \geqslant 0$, так что выражение $A + 2Bt + Ct^2$ представляет собой квадратичную зависимость относительно t, выпуклую вниз[1].

В силу неотрицательности этого выражения его дискриминант не может быть положительным: $4B^2 - 4AC \leqslant 0$, откуда $B^2 \leqslant AC$. Во введённых обозначениях это и есть неравенство (4).

Неравенство Коши исключительно важно в линейной алгебре, функциональном анализе, теории вероятностей и их приложениях. В форме

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

несколько более общей по сравнению с (5), оно справедливо не только для эвклидовой нормы, но и для других норм.

Неравенство Бернулли

Для любого вещественного числа $x > -1$ и натуральной степени n справедливо *неравенство Бернулли*:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx. \tag{6}$$

Докажем его методом математической индукции. При $n = 1$ неравенство справедливо: $(1 + x)^1 \geqslant 1 + x$. Индукционный переход от предположительно справедливого (6) к случаю для $(n + 1)$ осуществим, умножив (6) на $(1 + x)$:

$$(1 + x)^{n+1} \geqslant (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n + 1)x,$$

что и требовалось доказать.

Соотношение (6) является частным случаем *общего неравенства Бернулли*, приведённого и доказанного в [1, п.1].

В анализе неравенство Бернулли связано прежде всего с натуральными логарифмами и свойствами их основания. Подробнее см. [1, п.6].

[1]По школьной терминологии — „парабола ветвями вверх“.

Сумма арифметической прогрессии

Для произвольных (в том числе комплексных) чисел a, d сумма последовательных n членов арифметической прогрессии, образованных этими числами как основанием и разностью, может быть найдена по формуле

$$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \big(a + (n-1)d\big) = \frac{n}{2} \cdot \big(2a + (n-1)d\big). \qquad (7)$$

В частности, при $a = d = 1$ имеет место формула суммы последовательных натуральных чисел:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (8)$$

Для доказательства достаточно заметить, что сложение первого и последнего слагаемых в (7) даёт точно такой же результат, как сложение второго и предпоследнего, третьего и предпредпоследнего, и т.д.:

$$a + \big(a + (n-1)d\big) = (a+d) + \big(a + (n-2)d\big) = \ldots = 2a + (n-1)d.$$

Количество таких пар, очевидно, равно половине числа складываемых членов прогрессии, откуда и вытекает формула.

Полезно помнить её словесное выражение: *сумма последовательных членов арифметической прогрессии равна среднему арифметическому первого и последнего слагаемых, умноженных на общее число складываемых членов.* Более формальный вывод (7) см. в [4, п. 2.3].

Арифметическая прогрессия — одно из старейших тождеств, известных в математике. Им пользовались ещё древние египтяне.

Преобразование Абеля

Пусть $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — наборы произвольных (возможно, комплексных) чисел. Тогда имеет место формула *преобразования Абеля*[2]

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_n Y_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) Y_k, \qquad \text{где} \quad Y_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k. \qquad (9)$$

Для доказательства заметим прежде всего, что $y_1 \equiv Y_1$, а при $k > 1$ имеет место $y_k = Y_k - Y_{k-1}$.

[2] Иногда говорят „*дискретное* преобразование Абеля“, так как у него есть ещё интегральная формулировка.

Подставляя эти равенства в сумму, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n =$$
$$= x_1Y_1 + x_2(Y_2 - Y_1) + x_3(Y_3 - Y_2) + \cdots + x_n(Y_n - Y_{n-1}) =$$
$$= (x_1 - x_2)Y_1 + (x_2 - x_3)Y_2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)Y_{n-1} + x_nY_n =$$
$$= x_nY_n - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)Y_k\,,$$

что и требовалось доказать.

Один из примеров применения преобразования Абеля будет приведён далее (тождество Архимеда), другие примеры можно найти в [3].

Преобразование Абеля широко применяется для суммирования рядов и упрощения сумм. Также оно служит теоретическим обоснованием для некоторых признаков сходимости рядов, например, признака Дирихле [2, п. 6].

Тождество Архимеда

Для суммы квадратов натуральных чисел справедливо *тождество Архимеда*:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{10}$$

Оно может быть доказано как данность (см., например, [1, п.1]) или выведено различными способами (см. там же); мы здесь рассмотрим вывод на основе преобразования Абеля (9).

Положим в (9), что $x_k = y_k = k$. Согласно формуле (8), в данном случае $Y_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Применяя преобразование и пользуясь (8), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\Big((k+1) - k\Big) \cdot \frac{k(k+1)}{2} =$$
$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2 + k) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k =$$
$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Перенесём неизвестную пока сумму квадратов из правой части в левую:

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{4} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{4}\,,$$

откуда непосредственно следует равенство (10).

Тождество Архимеда оказало заметное влияние на теорию разностных уравнений: различные способы его вывода и доказательства обогатили эту теорию рядом новых методов. Обзор некоторых из них можно увидеть в [1, п.1] и особенно в [4]. Одним из таких методов является далее рассматриваемый метод телескопических сумм.

Принцип телескопических сумм

Пусть для набора произвольных (в том числе комплексных) чисел $x_1, x_2, \dots x_n$ известна такая зависимость X_k, что при всех k справедливо равенство $x_k = X_k - X_{k-1}$. Тогда имеет место *формула телескопических сумм*:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n = X_n - X_0. \tag{11}$$

Для доказательства формулы достаточно подставить в сумму представление каждого из её слагаемых через X_k:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = (X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) + \dots + (X_{n-1} - X_n) + (X_n - X_{n-1}).$$

Каждое слагаемое, кроме X_0 и X_n, встречается здесь два раза с противоположными знаками и сокращается, так что остаётся лишь разность $X_n - X_0$.

Мы рассмотрим применение этого принципа на примере, который понадобится нам в дальнейшем. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Полагая $x_k = \frac{1}{k(k+1)}$, нетрудно заметить, что при всех k выполняется тождество

$$x_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

поэтому в данном случае $X_k = -\frac{1}{k+1}$.

Находя, что $X_0 = -1$ и $X_n = -\frac{1}{n+1}$, согласно (11) получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1. \tag{12}$$

На основе (12) можно доказать полезное неравенство. Заметим, что $n! \geqslant n(n-1)$. Отсюда следует

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3. \tag{13}$$

Метод телескопических сумм широко применяется в анализе и дискретной математике для упрощения выражений. Пожалуй, это самый известный из методов теории разностных уравнений. Выражение X_k называется разностной первообразной дискретной функции x_k. Рассмотрение телескопического суммирования составляет предмет статьи [3].

Сумма геометрической прогрессии

Ещё одним применением принципа телескопических сумм является вывод формулы для *суммы геометрической прогрессии*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Из очевидного равенства $x^{k+1} - x^k = x^k(x-1)$ следует, что

$$x^k = \frac{1}{1-x}(x^{k+1} - x^k),$$

если только $x \neq 1$. Подставляя это выражение в сумму, получаем

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x}\Big((1-x) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1})\Big).$$

После сокращения всех промежуточных слагаемых получается искомый результат:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad x \neq 1. \tag{14}$$

Здесь число x может быть произвольным (в том числе комплексным), за исключением единицы. Если же $x = 1$, то сумма легко находится непосредственно и оказывается равной n.

Заметим также, что формула (14) может быть получена домножением и делением суммы прогрессии на одну и ту же величину $(1-x)$ с последующим применением известной формулы разности степеней для $(a^n - b^n)$. Такой вывод показан, например, в [2, п.1].

Геометрическая прогрессия играет огромную роль в теории рядов: на ней прямо или косвенно основаны многие известные разложения и, кроме того, сравнение с ней используется в доказательстве некоторых признаков сходимости — например, признаках Коши и Даламбера [2]. О том, какое значение придавали геометрической прогрессии математики прошлого, можно судить хотя бы по следующему высказыванию Н. Х. Абеля (из письма, написанного в 1826 году):

> *Расходящиеся ряды — поистине изобретение дьявола, и основывать на них какие бы то ни было доказательства — стыд и позор. Используя их, можно прийти к любому заключению, именно потому эти ряды и породили так много логических ошибок и парадоксов. Я так болезненно реагирую на всё это, потому что, за исключением геометрической прогрессии, нет ни одного бесконечного ряда, сумма которого была бы строго определена.*

Суммирование выделением зависимости

При выводе тождества Архимеда с помощью преобразования Абеля получалось уравнение относительно неизвестного значения искомой суммы. Этот приём может быть использован и как самостоятельный метод суммирования.

Пусть необходимо найти сумму

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = X_n.$$

Добавим к ней слагаемое x_{n+1}:

$$X_n + x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k = x_1 + \sum_{k=2}^{n+2} x_k = x_1 + \sum_{k=1}^{n} x_{k+1}. \tag{15}$$

Здесь последняя сумма в правой части содержит столько же слагаемых, сколько X_n и они имеют такой же вид — за исключением того, что „сдвинуты на единицу по индексу“. Если удаётся выразить эту сумму через X_n, то относительно последней получается уравнение.

Рассмотрим этот метод на примере вычисления суммы

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}.$$

Согласно (15) записываем

$$X_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Из двух сумм в правой части первая связана с X_n очевидным образом, а вторая представляет собой геометрическую прогрессию:

$$X_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{X_n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Отсюда уже легко выразить искомую сумму X_n:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Данный приём подробно рассмотрен в [4, п. 2.3], он не столь универсален, как преобразование Абеля, но часто оказывается более простым и удобным при суммировании выражений со степенями. Примеры подобных преобразований можно найти и в [3].

Факториал и показательная функция

Известно, что факториал $n!$ представляет собой чрезвычайно быстро возрастающую величину. Так, $70! > 10^{100}$, а ведь число 10^{100} заведомо превосходит количество элементарных частиц в видимой части Вселенной. Мы изучим вопрос о сравнении факториала с показательной функцией N^n (при $1 < M \in \mathbb{N}$ также быстро возрастающей).

Рассматривая неравенство

$$n! > M^n \qquad \text{при } n \geqslant n_0,$$

нетрудно показать его справедливость при конкретных значениях натурального основания M.

Пусть, например, $M = 2$. Тогда неравенство $n! > 2^n$ выполняется при $n \geqslant 4$. Действительно, если $n = 4$, то $4! = 24 > 2^4 = 16$, а если $n > 4$, то выражения $n!$ и 2^n можно представить в виде

$$\begin{aligned} 2^n &= 2^4 \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}^{n-4} \\ n! &= 4! \cdot \underbrace{5 \cdot 6 \cdots n}_{n-4} \end{aligned}$$

Обе строки содержат одинаковое число сомножителей, но любой сомножитель второй строки превосходит соответствующий сомножитель первой строки, поэтому и $n!$ превосходит 2^n.

Аналогичным способом можно показать справедливость неравенств

$$\begin{aligned} &n! > 3^n \quad \text{при } n \geqslant 7 \\ &n! > 4^n \quad \text{при } n \geqslant 9 \\ &n! > 5^n \quad \text{при } n \geqslant 12 \\ &n! > 6^n \quad \text{при } n \geqslant 14 \\ &n! > 7^n \quad \text{при } n \geqslant 17 \\ &n! > 8^n \quad \text{при } n \geqslant 20 \\ &\text{и т.д.} \end{aligned}$$

Возникает, однако, важный вопрос: *всегда ли — то есть дли любого ли* M — существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, с которого начинает выполняться неравенство? Позднее мы вернёмся к нему, увидим, что на такой вопрос следует дать положительный ответ и покажем, как именно связаны n_0 и M.

ВАЖНОЕ ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ

Ранее было показано, что для возрастающих последовательностей $x_n = 2^n$ и $y_n = n!$ справедливо (начиная с некоторого n) неравенство $y_n > x_n$. Часто из этого делается неверный вывод о том, что „последовательность y_n возрастает быстрее, чем x_n“.

Определимся с терминологией. В анализе понятия типа „возрастает быстрее“ рассматриваются в основном применительно к функциям, но нетрудно определить их и для последовательностей.

Пусть последовательности x_n и y_n возрастают, по крайней мере начиная с некоторого n_0. Рассмотрим их отношение

$$\theta_n = \frac{x_n}{y_n}.$$

Говорят, что x_n и y_n возрастают *с одинаковой скоростью*, если с ростом n величина θ_n всё менее и менее отличается от единицы. Если вместо единицы речь идёт о каком-либо другом числе, *отличном от нуля*, то говорят, что эти последовательности возрастают *с сопоставимой скоростью.*

Если же отношение θ_n с ростом n всё менее и менее отличается от нуля, то тогда — и только тогда! — говорят о том, что y_n по сравнению с x_n *возрастает быстрее.* По аналогии нетрудно определить понятия „убывают с одинаковой скоростью“ (или с сопоставимой, или быстрее-медленнее).

Понятие „всё менее и менее отличается“, в свою очередь, нуждается в уточнении — и определить его со всей строгостью можно только через понятие предела последовательности. Сказанного, однако, уже достаточно для того, чтобы предостеречь читателя:

> *Сравнение скоростей возрастания и убывания последовательностей и функций может быть произведено через нахождение пределов — но не наоборот!*

В качестве простейшего примера можно рассмотреть последовательности

$$x_n = n^2 + n \quad \text{и} \quad y_n = n^2.$$

Совершенно очевидно, что они возрастают и $x_n > y_n$ — но возрастают они *одинаково.* Действительно, для них

$$\theta_n = \frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}.$$

При $n > 10$ все θ_n отличаются от единицы менее чем на 0.1, при $n > 100$ — менее чем на 0.01, при $n > 1000$ — менее чем на 0.001 и т.д.

Число и его экспонента, число и его логарифм

Произвольное натуральное число $n \in \mathbb{N}$ связано со своим логарифмом и своей экспонентой неравенством

$$\ln n < n < e^n. \tag{16}$$

Докажем сначала неравенство

$$e^n > n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Воспользуемся для этого методом математической индукции.

При $n = 1$ имеем очевидно справедливое $e > 1$. Далее, предполагая справедливость (17), выведем из него аналогичное неравенство для $(n+1)$. Для этого домножим его на e:

$$e^{n+1} > ne = n + (e-1)n \geqslant n + (e-1) > n+1,$$

что и требовалось. Неравенство (17) тем самым доказано полностью.

Логарифмируя его, получаем $n > \ln n$. Объединяя эти два неравенства вместе, получаем требуемое (16).

С использованием более сложных методов можно показать, что неравенство (16) *имеет место не только для* $n \in \mathbb{N}$, *но и для всех вещественных неотрицательных чисел.*

Основание натуральных логарифмов

В математике большую роль играет последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

про которую доказывается, что она имеет своим пределом основание натуральных логарифмов $e \approx 2.718\ldots$

Важнейшим этапом этого доказательства является *ограниченность* последовательности x_n. Мы докажем для неё неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3. \tag{18}$$

Воспользуемся для этого биномом Ньютона (1), предварительно записав биномиальный коэффициент C_n^k в виде

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{k! \cdot (1 \cdot 2 \cdots (n-k))} = \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdots n}{k!}.$$

Здесь числитель и знаменатель содержат по k множителей. С учётом этого x_n можно записать следующим образом:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} + \cdots \frac{1}{n!}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}\underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}\cdots\underbrace{\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}.$$

Заметим, во-первых, что $0! = 1! = 1$, а во-вторых, что каждый охваченный фигурной скобкой множитель строго меньше единицы. Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Применяя к правой части (13), получаем отсюда неравенство (18).

Можно доказать (см., например, [2, п. 8]), что последовательности x_n *и*

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

не просто связаны соотношением $x_n < y_n$*, как это было показано, но и сходятся к одному пределу.*

Пользуясь неравенством Бернулли (6)*, можно показать, что последовательность* x_n *строго монотонно возрастает — см. [1, п. 6]. Это означает, что* $2 = x_1 < x_n$*, и неравенство* (18) *можно расширить:*

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Степенная и показательная функции

Пусть k — некоторая натуральная константа, причём $k \geqslant 3$. Тогда степенна́я функция n^k и показательная функция k^n строго монотонно возрастают, и мы докажем, что для них при достаточно больших n справедливо неравенство

$$n^k \leqslant k^n. \tag{19}$$

Воспользуемся для этого методом математической индукции. Неравенство (19) заведомо выполняется при $n = k$, так как $k^k \leqslant k^k$.

Пусть теперь $n \geqslant k \geqslant 3$. Предполагая справедливость (19), умножим обе его части на $(\frac{n+1}{n})^k$:

$$(n+1)^k \leqslant k^n \cdot (1 + \tfrac{1}{n})^k \leqslant k^n \cdot (1 + \tfrac{1}{n})^n < k^n \cdot 3 \leqslant k^n \cdot k = k^{(n+1)}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством (18). Индукционный переход удался, и тем самым, (19) справедливо при $n \geqslant k$.

При $k = 1$, очевидно, (19) не выполняется (точнее, выполняется только при $n = 1$). Случай $k = 2$ является особым: теперь невозможно воспользоваться соотношением (18), но (19) остаётся справедливым для $n \geqslant 4$. Доказательство можно найти в [1, п. 4]

Замечание для преподавателя. При изучении темы „предел последовательности“ можно рассмотреть более общее неравенство

$$n^k \leqslant M^n,$$

где $k > 0$, $M > 1$ (эти числа не обязаны быть натуральными). Прологарифмировав его, получаем эквивалентную форму

$$k \ln n \leqslant n \ln M$$

или, что то же самое,

$$\frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{\ln M}{k}. \tag{20}$$

В силу $M > 1$ правая часть является положительным числом.

Пользуясь теоремой Штольца [1, п. 7], нетрудно показать, что последовательность $\frac{\ln n}{n}$ в левой части является бесконечно малой, а значит, неравенство (20) обязательно выполняется для всех n, начиная с некоторого номера.

Факториал и автостепень

Автостепенью[3] называют степенно́е выражение, основание и показатель которого зависят от n схожим образом. Мы будем рассматривать выражения вида $u(n)^{v(n)}$, где u и v являются полиномами первой степени от n. Простейший из таких случаев — автостепень n^n.

Она является весьма быстро возрастающей последовательностью. Так, вполне очевидно, что при $n > k$ имеют место неравенства

$$n^n > k^n \quad \text{и} \quad n^n > n^k,$$

то есть при достаточно больших n автостепень превосходит как степенну́ю, так и показательную функции.

Несложно обосновать и неравенство

$$n^n \geqslant n!,$$

справедливое при всех натуральных n. Действительно, как n^n, так и $n!$ состоят из n сомножителей, но в первом выражении каждый сомножитель равен n, а во втором выражении каждый сомножитель не превосходит n. Равенство здесь может иметь место лишь при $n = 1$.

Мы докажем справедливое при всех $n \in \mathbb{N}$ более сложное неравенство

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \tag{21}$$

согласно которому *факториал и автостепень возрастают с соизмеримыми скоростями*.

Первое из этой пары неравенств докажем по индукции. При $n = 1$ имеем справедливое

$$\frac{1}{3} < 1!.$$

Далее необходимо показать переход для предположительно справедливого $\left(\frac{n}{3}\right) < n!$ от n к $(n+1)$. Он выполняется следующим образом:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{(n+1)} \cdot \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

[3] Греческая приставка „авто-“ означает „сам-“ или „само-“. В данном контексте подразумевается, что показатель степени определяется самим основанием или наоборот. Термин „автостепень“ является устаревшим и в настоящее время почти не используется, однако в ряде случаев удобен.

Применяя к знаменателю $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ неравенство (18), получаем

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^n,$$

что и требовалось.

Для доказательства второго неравенства

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

рассмотрим вспомогательное выражение $(n!)^2$. Оно состоит из $2n$ сомножителей, среди которых дважды повторяется каждое натуральное число от 1 до n включительно. Запишем их в таком порядке:

$$(n!)^2 = (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdots((n-1)\cdot 2)\cdot(n\cdot 1) = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1).$$

Преобразуем каждый сомножитель этого произведения, выделив в нём полный квадрат:

$$k(n-k+1) = -\left(k^2 - 2k\frac{(n+1)}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Таким образом,

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) < \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Величина под знаком произведения не зависит от индекса k и умножается на себя n раз, так что

$$(n!)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства, получаем требуемое соотношение.

Неравенство (21) говорит о том, что при определённом подборе коэффициентов факториал $n!$ и автостепень представляют собой сопоставимые величины. Также из него следует неравенство

$$\frac{n}{3} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2},$$

часто оказывающееся полезным при исследовании сходимости рядов по признаку Коши [2, п. 4].

Факториал и показательная функция (окончание)

Зная соотношение (21), мы теперь можем дать полный ответ на вопрос о том, как соотносятся между собой факториал $n!$ и показательная функция M^n. Для этого рассмотрим неравенство

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n > M^n.$$

Очевидно, оно справедливо при $n > 3M$. Объединяя его с (21), получаем

$$n! > M^n \qquad \text{при } n > 3M. \tag{22}$$

Иными словами, *факториал гарантированно превосходит любую показательную функцию, начиная с номера, троекратно превосходящего её основание.*

Условие $n > 3M$ в этом результате избыточно. В действительности неравенство начинает выполняться с номера, приблизительно равного (и всегда чуть меньшего) Me, где $e \approx 2.71828183$ — основание натуральных логарифмов. Это „приблизительно равно“ становится тем точнее, чем больше число M. Получить об этом наглядное представление помогает следующая таблица:

$n! > 10^n$	при $n \geqslant 25$	$\frac{25}{10} = 2.5$
$n! > 100^n$	при $n \geqslant 269$	$\frac{269}{100} = 2.69$
$n! > 1000^n$	при $n \geqslant 2714$	$\frac{2714}{1000} = 2.714$
$n! > 10000^n$	при $n \geqslant 27177$	$\frac{27177}{10000} = 2.7177$

Однако простого чисто аналитического способа *точно* определить момент начала выполнения неравенства не существует.

Замечание для преподавателя. Утверждение предыдущего абзаца вытекает из того, что неравенство (22) можно записать в эквивалентной формулировке

$$\sqrt[n]{n!} > M,$$

а последовательность $x_n = \sqrt[n]{n!}$ возрастает с такой же скоростью, как $y_n = \frac{n}{e}$. Это, в свою очередь, можно представить как следствие из формулы Стирлинга [4, пп. 4.4 и 9.6] или доказать как самостоятельный результат (после знакомства с темами „предел последовательности“ и „предел функции“ [1, п. 13]). На этом же примере можно проиллюстрировать тезис о допустимости замены под пределом множителя или делителя его эквивалентом.

Историческая справка

Описанные на предыдущих страницах методы и результаты охватывают огромный период в истории математики — около четырёх тысяч лет. Ниже они перечислены в хронологическом порядке.

Формулы суммирования арифметической и геометрической прогрессий были получены египтянами не позднее XX века до нашей эры. Так называемый папирус Ахмеса — „методичка“, переписанная около 1650 г. до н.э. с первоисточника примерно 1970 г. до н.э. — содержит соответствующие задачи №64 и №79. В первой требуется разделить десять мер зерна между десятью людьми так, чтобы каждый следующий получал на $\frac{1}{8}$ меры больше предыдущего (говоря современным языком, по сумме арифметической прогрессии, количеству слагаемых и приращению требовалось найти основание). Вторая задача представляет собой известную шутку о семи домах, в которых обитает по семи кошек, съевших по семи мышей и т.п. Требовалось найти общую сумму всех упомянутых объектов.

Тождество Архимеда получено греческими математиками не позднее III века до н.э. Оно получило своё название из-за того, что именно Архимед привёл в своих трудах первое известное нам доказательство (разумеется, оно было выполнено совершенно иначе, чем показано здесь).

Формула бинома Ньютона в действительности была известна ещё арабским средневековым математикам. Первое дошедшее до нас упоминание встречается в трактате середины XIII века, написанном Абу Джафаром Мухаммадом Насир ад-Дином ат-Туси. В трудах европейских математиков эта формула впервые встречается у Блеза Паскаля в 1665 году. Одиннадцатью годами позже Айзек Ньютон обобщил её для случая отрицательных и нецелых показателей.

Принцип телескопических сумм впервые появляется у персидского математика начала XV века Джамшида ибн-Масуда Гияс ад-Дина аль-Ка́ши. Из европейских математиков этим приёмом наиболее активно пользовался Леонард Эйлер в середине XVIII века.

Натуральные логарифмы впервые упоминаются в середине XVII века у Николаса Кауфмана и Джона Спайделла (изначально они назывались „гиперболическими логарифмами“). Последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, предел которой равен основанию натуральных логарифмов, была исследована в трудах Якоба Бернулли (вторая половина того же XVII века). Он же получил неравенство $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ при $x > -1$, ныне носящее его имя.

Вопрос о соотношении между факториалом, показательными и степенны́ми функциями исследовался во второй половине XVII и в XVIII веке Готфридом Лейбницем, династией Бернулли (Якоб, Иоганн, Даниэль) и Леонардом Эйлером. Эти исследования были связаны с представлением функций рядами и сходимостью таких рядов.

Тот же Эйлер систематически пользовался выделением зависимости для нахождения сумм рядов, проявляя подчас чудеса математической интуиции.

Преобразование, носящее имя Нильса Абеля, появилось в его работах первой трети XIX века, посвящённых сходимости и суммированию рядов. Примерно тогда же — в 1821 году — Огюстен-Луи Коши доказал своё неравенство о суммах.

Вопрос о понятиях, стоя́щих за утверждениями типа „возрастает быстрее или медленнее“ был поставлен и решён на рубеже XIX и XX веков Эдмундом Ландау. Его интересовало главным образом поведение функций, однако результаты оказались равно применимыми и к последовательностям.

Упражнения

Упражнение 1. *Укажите теоретико-множественное обоснование тождества* $C_n^k \equiv C_n^{n-k}$ *для биномиальных коэффициентов.*

Упражнение 2. *Для фиксированного* $n \in \mathbb{N}$ *будем рассматривать двоичные числа с* $2n$ *разрядами (включая и те, которые начинаются незначащими нулями). Назовём такое число „счастливым“, если его старшие* n *разрядов и младшие* n *разрядов содержат одинаковое число единиц. Выразите через биномиальные коэффициенты количество таких „счастливых“ чисел.*

Упражнение 3. *Найдите общее число подмножеств* n*-элементного множества. (В этот счёт нужно включить как пустое множество* $\emptyset \subset A$*, так и само множество в качестве собственного подмножества* $A \subset A$*.)*

Упражнение 4. *Покажите, что при* $x > 0$ *неравенство Бернулли* (6) *непосредственно следует из формулы бинома Ньютона* (1).

Упражнение 5. *Укажите геометрическую интерпретацию тождества Архимеда* (10). *(Для древнегреческих математиков вторые степени могли означать только площади фигур, а третьи степени — только объёмы тел.)*

Упражнение 6. *Пользуясь формулой суммы арифметической прогрессии* (7), *тождеством Архимеда* (10), *а также преобразованием Абеля* (9), *найдите выражение для суммы последовательных кубов*

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Упражнение 7. *Пользуясь преобразованием Абеля* (9) *или суммируя методом* (15), *найдите простое выражение для суммы*

$$\frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

Упражнение 8. *Обобщите результат предыдущей задачи и найдите выражение для суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k,$$

где числа u_k *образуют арифметическую прогрессию, а числа* v_k *— геометрическую.*

Упражнение 9. *Последовательности* x_n *и* y_n *таковы, что* $x_1 \leqslant y_1$ *и при всех* $n \geqslant 2$ *справедливо неравенство*

$$x_n - x_{n-1} \leqslant y_n - y_{n-1}.$$

Докажите, что $x_n \leqslant y_n$ *при всех натуральных* n.

Упражнение 10. *Пользуясь результатом предыдущего упражнения, докажите неравенство* $\ln n^2 \leq n$.

Упражнение 11. *Найдите разностную первообразную* X_n *для дискретной функции*

$$x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Упражнение 12. *Неравенство* $n! \geqslant n^k$ *выполняется (начиная с некоторого* n*) для всех натуральных* k. *Докажите, что оно справедливо в усиленной форме:*

$$n! \geqslant G \cdot n^k,$$

где G *— произвольная вещественная константа.*

Упражнение 13. *Исходя из* (16), *докажите для* $x > 1$ *неравенство*

$$\ln[x] < x - 1,$$

где $[x]$ *есть наибольшее целое число, не превосходящее* x. *Попробуйте, опираясь на весь курс школьной математики, доказать для* $x \geqslant 0$ *более сильное неравенство*

$$\ln(1 + x) \leqslant x.$$

Упражнение 14. *Докажите, что для автостепени справедлива цепочка неравенств*

$$n^{n/2} < \left(\frac{n}{3}\right)^n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n < n^n,$$

начиная с некоторого (какого именно?) номера n.

Упражнение 15. *Двойным факториалом* $n!!$ *называется произведение последовательно уменьшающихся на двойку сомножителей*

$$n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots,$$

заканчивающееся единицей или двойкой. Пользуясь методом математической индукции, докажите неравенство

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

справедливое при всех натуральных n.

Упражнение 16. *Докажите, что квадрат факториала превосходит автостепень, то есть* $(n!)^2 \geqslant n^n$ *и тем самым справедливо неравенство*

$$n! \leqslant n^n < (n!)^2.$$

Упражнение 17. *Докажите, что последовательность* $x_n = \frac{\ln n}{n}$ *монотонно убывает при* $n \geqslant 3$.

Литература

[1] *Баландин М.* **Предел числовой последовательности.** — Рукопись[4]. 2, 7, 9, 10, 16, 17, 19

[2] *Баландин М.* **Сходимость числовых рядов.** — Рукопись[5]. 2, 9, 11, 16, 18

[3] *Бендукидзе А., Сулаквелидзе А.* **Вычисление сумм.** — „Квант“, 1970, № 10, стр. 37–40. 70, № 8, стр. 33–36. 4, 9, 11, 12

[4] *Кнут Д., Грэхэм Р., Паташник О.* **Конкретная математика: основание информатики.** — М.: Мир, 1998. 4, 8, 10, 12, 19

[4]Значительно сокращённая версия была опубликована в 2009 году издательством НГТУ под названием „Числовые последовательности: учебное пособие“.

[5]Сокращённый вариант был опубликован в 2010 году издательством НГТУ